Algèbre-Chapitre 1

Trigonométrie

I Rappels sur les congruences

Nous faisons ici quelques rappels sur la notion de congruence :

Définition I.1. *Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $m > 0$.*
Les nombres x et y sont congrus modulo m si $x - y$ est un multiple de m ; i.e. si $\exists k \in \mathbb{Z} \quad x - y = km$ ou encore $x = y + km$. On note alors : $x = y[m]$.

Exemple I.1. *On a : $\dfrac{5\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi = -\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.*
On a : $\dfrac{47\pi}{5} = -\dfrac{3\pi}{5} + 5.2\pi = -\dfrac{3\pi}{5}[2\pi]$.

Proposition I.1. *Soient $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $m > 0$. Alors :*

1. *$x = x[m]$ (réfléxivité)*
2. *Si $x = y[m]$ et $y = z[m]$ alors : $x = z[m]$. (transitivité)*
3. *Si $x = y[m]$, alors $y = x[m]$. (symétrie)*
4. *Si $x = x'[m]$ et $y = y'[m]$, alors $x + y = x' + y'[m]$.*
5. *Si $x = y[m]$, alors $\lambda x = \lambda y[|\lambda| m]$.*
6. *Si I est un intervalle semi-ouvert de longueur m, alors il existe un unique $r \in I$ tel que : $x = r[m]$.*
7. *Si $x = y[m]$, alors $x = y\left[\dfrac{m}{k}\right]$.*

Exemple I.2. *Résoudre l'équation $x + \dfrac{\pi}{3} = 3x + \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.*

II Définitions et étude des fonctions

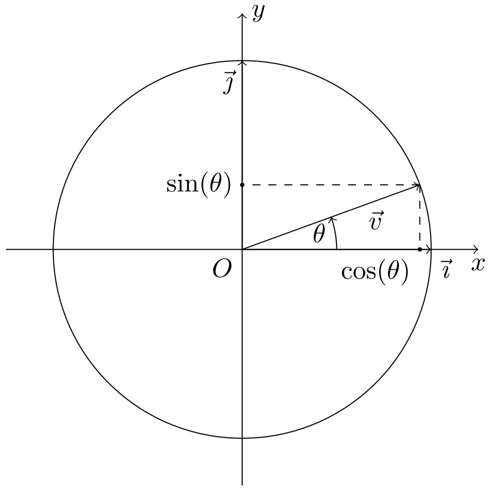
II.1 Sinus et cosinus

Définition II.1 (Sinus et cosinus)**.** *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $\vec{v}$ le vecteur de norme 1 tel que : $(\vec{\imath}, \vec{v}) = \theta$.*
Alors, l'abscisse de $\vec{v}$ est appelée le cosinus de θ et notée $\cos(\theta)$ et son ordonnée est appelée le sinus de θ et notée $\sin(\theta)$.

Proposition II.1 (Étude des fonctions sin et cos)**.**

1. *Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont 2π-périodiques.*
2. (a) *La fonction $\cos$ est paire.*
   (b) *La fonction $\sin$ est impaire.*
3. *$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta) \\ \sin(\pi - \theta) = \sin(\theta) \end{cases}$*
   (a) *Le graphe de $\cos$ est symétrique par rapport au point de coordonnées $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$.*
   (b) *Le graphe de $\sin$ est symétrique par rapport à l'axe d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$.*
4. *Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont positives sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.*

Figure 1.1 – Cercle trigonométrique



5. *Les fonctions* cos *et* sin *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$

   et : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} \cos'(x) = -\sin(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \sin'(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

6. *On a les tableaux de variations suivants* :

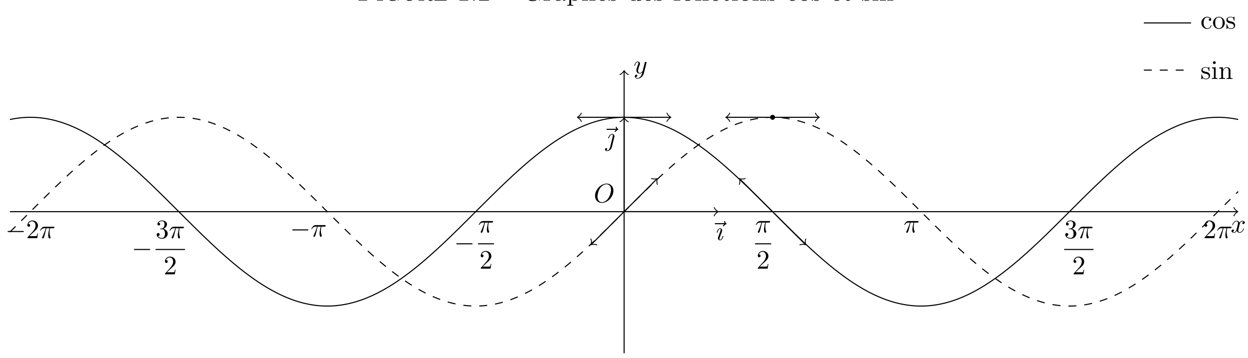
x	0		$\dfrac{\pi}{2}$
$\cos'(x)$	0	$-$	*-1*
$\cos(x)$	1	$\searrow$	0

x	0		$\dfrac{\pi}{2}$
$\sin'(x)$	*1*	$-$	0
$\sin(x)$	0	$\nearrow$	1

7. $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$
8. $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \cos(\theta) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(\theta) \leq 1$

Grâce à cette étude, nous pouvons tracer les graphes des fonctions cos et sin :

Figure 1.2 – Graphes des fonctions cos et sin



II.2 Tangente

Définition II.2. *La fonction tangente est la fonction* tan *définie par l'expression suivante* :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Remarque II.1. *On a* : $\cos(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2}[\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Proposition II.2 (Étude de la fonction tangente)**.** 1. *L'ensemble de définition de* tan *est* : $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{x \in \mathbb{R}/x = \frac{\pi}{2}[\pi]\right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$

2. *La fonction* tan *est* π*-périodique.*

3. *La fonction* tan *est impaire.*

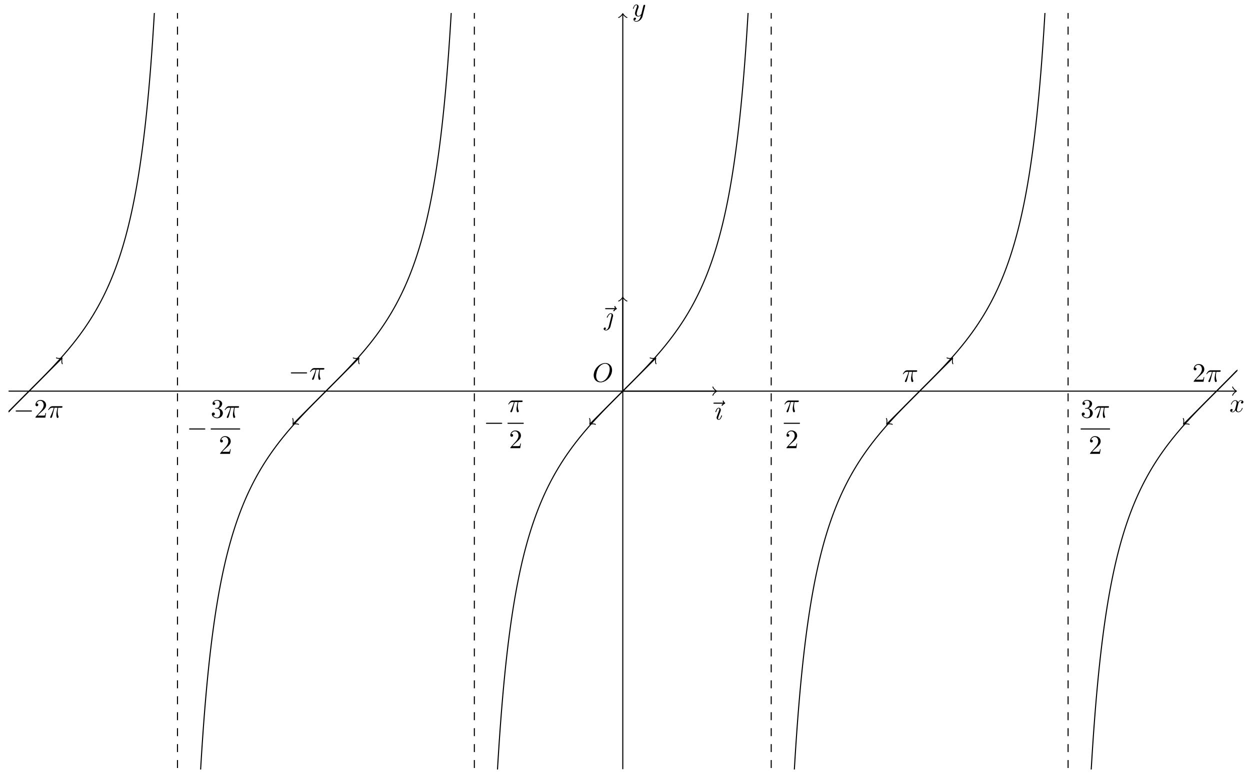
4. *La fonction est dérivable sur* $\mathcal{D}_{\tan}$
   et : $\forall x \in \mathcal{D}_{\tan} \quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$.

5. $\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty \end{cases}$
   Le graphe de tan *admet des asymptotes verticales en* $\frac{\pi}{2}$ *et en* $-\frac{\pi}{2}$.

6. *On a le tableau de variations suivant* :

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan'(x)$	*1* +	||
$\tan(x)$	$0 \nearrow +\infty$	||

FIGURE 1.3 – Graphe de la fonction tan



III Propriétés

III.1 Formulaire

Nous pouvons retrouver toutes les formules du formulaire de trigonométrie à partir de celle de $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.

Exemple III.1. *Calculer* $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *et* $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

III.2 Normalisation

Proposition III.1 (Normalisation)**.** *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\omega \in \mathbb{R}$.
Alors, il existe $A \in \mathbb{R}^+$ *et* $\varphi \in \mathbb{R}$ *tels que :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x) = A\cos(\omega x + \varphi)$$

Mieux :

$$\begin{cases} A = \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos(\varphi) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin(\varphi) = -\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

Corollaire III.1 (Normalisation)**.** *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\omega \in \mathbb{R}$.
Alors, il existe $A \in \mathbb{R}^+$ *et* $\varphi \in \mathbb{R}$ *tels que :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x) = A\sin(\omega x + \varphi)$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser le fait que : $\cos(\theta) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$. □

Remarque III.1.
1. *Ces propriétés nous permettent de comprendre pourquoi la somme de deux sinusoïdes de même fréquence est une sinusoïde.*
2. *Puisque nous connaissons le signe des fonctions* sin *et* cos, *ces transformations nous permettent également d'étudier le signe d'une expression de la forme :* $a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$.

Exemple III.2. *Normaliser l'expression* $\cos(x) + \sin(x)$ *et représenter la fonction associée à cette expression.*

III.3 Expressions trigonométriques

Définition III.1.
1. *Un polynôme trigonométrique en* $\theta \in \mathbb{R}$ *est une somme de termes de la forme* $\lambda\cos^n(\theta)\sin^m(\theta)$ *où* $\lambda \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ *et* $m \in \mathbb{N}$.
2. *Une expression trigonométrique en* $\theta \in \mathbb{R}$ *est dite linéarisée si elle s'écrit comme une somme de termes de la forme :* $\lambda\cos(n\theta)$ *ou* $\lambda\sin(n\theta)$ *où* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}$.

Proposition III.2.
1. *Un polynôme trigonométrique peut être transformé en une expression trigonométrique linéarisée.*
2. *Une expression trigonométrique linéarisée peut être transformée en un polynôme trigonométrique.*

Exemple III.3.
1. *Écrire* $\cos(3\theta)$ *sous la forme d'un polynôme trigonométrique.*
2. *Linéariser* $\cos^3(\theta)$.