Algèbre-Chapitre 10

Algèbre linéaire - Familles de vecteurs - Dimension

La dimension d'un espace vectoriel est le nombre de paramètres nécessaires pour le décrire en terme de combinaison linéaire de vecteurs. Ainsi, une droite est un espace de dimension 1, un plan est un espace de dimension 2 et l'espace est de dimension 3. Nous généraliserons cette idée au cas d'un espace vectoriel dit de dimension finie. Pour cela, nous devons aborder préalablement la notion de familles de vecteurs et ses propriétés.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou plus généralement un corps contenant $\mathbb{Q}$ et E et F des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

I Familles de vecteurs

Définition I.1 (Famille de vecteurs). Une famille de vecteurs de E est la donnée d'un n -uplet $(u_i)_{i=1}^n = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ de vecteurs de E où $n \in \mathbb{N}$.

i.e. $(u_i)_{i=1}^n \in E^n$

i.e. $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad u_i \in E$

I.1 Familles génératrices

Définition I.2 (Famille génératrice). Soit $(u_i)_{i=1}^n \in E^n$ une famille de n vecteurs de E .

La famille $(u_i)_{i=1}^n$ est une famille génératrice de E si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs $(u_i)_{i=1}^n$.

i.e. $\forall v \in E \exists (\alpha_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n \quad v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot u_i$

i.e. $E = \text{vect}(u_1, \dots, u_n)$

Exemple I.1. 1. La famille $(u_1, u_2, \dots, u_n) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$.

2. Montrons que la famille $(u_1, u_2, u_3, u_4) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Proposition I.1 (Famille qui engendre une famille génératrice). Soient $(u_i)_{i=1}^n$ une famille génératrice de E et $(v_j)_{j=1}^p$ une famille de vecteurs de E .

On suppose que chaque vecteur u_i est une combinaison linéaire des vecteurs $(v_j)_{j=1}^p$ (la famille $(v_j)_{j=1}^p$ engendre la famille $(u_i)_{i=1}^n$).

Alors, la famille $(v_j)_{j=1}^p$ est une famille génératrice de E .

Exemple I.2. Redémontrons que la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ en montrant qu'elle engendre la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Proposition I.2 (Sur-famille d'une famille génératrice). Soit $(u_i)_{i=1}^n$ une famille génératrice de E et $(u_i)_{i=n+1}^p$ une famille de vecteurs de E .

Alors, $(u_i)_{i=1}^p$ est une famille génératrice de E .

Exemple I.3. La famille $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une sur-famille

de la famille $(u_1, u_2, u_3, u_4) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ qui est génératrice. Elle est donc également génératrice.

I.2 Famille libre - Famille liée

Définition I.3 (Famille libre - Famille liée). Soit $(u_i)_{i=1}^n$ une famille de vecteurs de E .

1. La famille $(u_i)_{i=1}^n$ est libre (ou linéairement indépendante) si :

$$\forall (\alpha_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot u_i = 0_E \implies (\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \alpha_i = 0)$$

i.e. si la seule combinaison linéaire des vecteurs $(u_i)_{i=1}^n$ qui est nulle a tous ses coefficients nuls.

i.e. si l'équation d'inconnue $(\alpha_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n$ suivante :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot u_i = 0_E \quad (\mathcal{E})$$

admet pour unique solution le n -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (0, \dots, 0)$.

2. La famille $(u_i)_{i=1}^n$ est liée si elle n'est pas libre.

i.e. $\exists (\alpha_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\} \quad 0_E = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot u_i$

i.e. Le vecteur nul est une combinaison linéaire des vecteurs $(u_i)_{i=1}^n$ dont les coefficients ne sont pas tous nuls.

Remarque I.1. Pour montrer une famille $(u_i)_{i=1}^n$ est libre, on montre que l'équation $(\mathcal{E})$ admet pour unique solution le n -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (0, \dots, 0)$.

Inversement, pour montrer qu'elle est liée, il suffit d'exhiber un n -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ dont au moins un coefficient est non nul tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot u_i = 0_E$.

Dans tous les cas, la résolution de l'équation $(\mathcal{E})$ permet de déterminer si la famille est libre ou liée.

Remarque I.2. Une famille de vecteurs $(u_1, u_2) \in E^2$ est libre si, et seulement si, les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires. Elle est liée si, et seulement si, les vecteurs u_1 et u_2 sont colinéaires.

Exemple I.4. 1. Montrons que $(u_1, u_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre.

2. Montrons que $(u_1, u_2, u_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ est une famille liée.

Proposition I.3 (Sous-famille d'une famille libre - Sur-famille d'une famille liée). Soit $(u_i)_{i=1}^n$ une famille de vecteurs de E .

1. Si $(u_i)_{i=1}^n$ est une famille libre et $(i_k)_{k=1}^p \in \llbracket 1, n \rrbracket^p$ sont des indices distincts deux à deux, alors $(u_{i_k})_{k=1}^p$ est une famille libre. i.e. Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

2. Si $(u_i)_{i=1}^n$ est une famille liée de E et $(u_i)_{i=n+1}^p$ une famille de vecteurs de E , alors $(u_i)_{i=1}^p$ est une famille liée de E .

i.e. Toute surfamille d'une famille liée est liée.

Proposition I.4 (Caractérisation des familles liées). Soit $(u_i)_{i=1}^n$ une famille de vecteurs de E .

La famille $(u_i)_{i=1}^n$ est liée si, et seulement si, un des vecteurs de $(u_i)_{i=1}^n$ est une combinaison linéaire des autres vecteurs.

i.e. si, et seulement si, il existe $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $(\alpha_i)_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n \in \mathbb{K}^{n-1}$ tel que $u_{i_0} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n \alpha_i \cdot u_i$

Exemple I.5. Montrons que la famille $(u_1, u_2, u_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$ est liée.

I.3 Bases d'un espace vectoriel

Définition I.4 (Base - Coordonnées d'un vecteur). Soit $\mathcal{B} = (u_i)_{i=1}^n$ une famille de vecteurs de E .

1. La famille $\mathcal{B}$ est une base si

$$\forall v \in E \exists ! (\alpha_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n \quad v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot u_i$$

i.e. Tout vecteur de E d'écrit de manière unique sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs $(u_i)_{i=1}^n$.

2. Dans ce cas, les coefficients $(\alpha_i)_{i=1}^n = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ sont appelés les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$. On les note $(v)_{\mathcal{B}}$.

Exemple I.6. 1. La famille $\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{K}^2$.

Pour tout vecteur de $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$, on a $:(v)_{\mathcal{B}_2} =$

2. La famille $\mathcal{B}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{K}^3$.

Pour tout vecteur de $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$, on a $:(v)_{\mathcal{B}_3} =$

3. La famille $\mathcal{B}_n = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

Pour tout vecteur de $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$, on a $:(v)_{\mathcal{B}_n} =$

Définition I.5 (Base canonique de $\mathbb{K}_n$). La famille de vecteur $\mathcal{B}_n = (e_i)_{i=1}^n = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est appelée

la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Exemple I.7. 1. La famille $\mathcal{B}_2 = (1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

Pour tout vecteur de $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{K}_2[X]$, on a $:(P)_{\mathcal{B}_2} =$

2. La famille $\mathcal{B}_3 = (1, X, X^2, X^3)$ est une base de $\mathbb{K}_3[X]$.

Pour tout vecteur de $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{K}_3[X]$, on a $:(P)_{\mathcal{B}_3} =$

3. La famille $\mathcal{B}_n = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Pour tout vecteur de $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{K}_n[X]$, on a $(v)_{\mathcal{B}_n} =$

Définition I.6 (Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$). La famille de vecteurs $\mathcal{B}_n = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ est appelée la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemple I.8. Montrons que la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et précisons les coordonnées de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition I.5 (Caractérisation des bases). Les bases sont les familles libres et génératrices.

Exemple I.9. Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto (P(1), P(2)) \end{cases}$

Déterminons une famille génératrice de $\ker(\varphi)$.

Déduisons-en une base de $\ker(\varphi)$.

I.4 Morphismes et familles de vecteurs

Proposition I.6 (Image d'une famille génératrice). Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre les espaces vectoriels E et F . Soit $(u_i)_{i=1}^n$ une famille génératrice de E .

Alors, l'image $(\varphi(u_i))_{i=1}^n$ de la famille $(u_i)_{i=1}^n$ est une famille génératrice de $\text{Im}(\varphi)$.

Remarque I.3. En particulier, l'image d'une base par φ est une famille génératrice de $\text{Im}(\varphi)$.

Exemple I.10. Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto \begin{pmatrix} x + y + 2z \\ 2x + y + 3z \\ 3x + 2y + 5z \end{pmatrix} \end{cases}$

Déterminons une famille génératrice de $\text{Im}(\varphi)$.

Déduisons-en une base de $\text{Im}(\varphi)$.

Proposition I.7 (Famille de vecteurs et injectivité ou surjectivité). Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(u_i)_{i=1}^n \in E^n$.

Alors :

1. Si $(u_i)_{i=1}^n$ est une famille génératrice de E et φ est surjective, alors $(\varphi(u_i))$ est une famille génératrice de F .
2. Si $(u_i)_{i=1}^n$ est une famille libre et φ est injective, alors $(\varphi(u_i))$ est une famille libre.

Théorème I.1 (Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base). Soit $\mathcal{B} = (u_i)_{i=1}^n \in E^n$ une base de E et $(v_i)_{i=1}^n \in F^n$.

Alors, il existe une unique application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \varphi(u_i) = v_i$$

Plus précisément, si $u \in E$ et $(u)_{\mathcal{B}} = (\alpha_i)_{i=1}^n$, alors $\varphi(u) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot v_i$.

Proposition I.8 (Caractérisation des propriétés de φ à partir de l'image d'une base). Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soit $\mathcal{B} = (u_i)_{i=1}^n \in E^n$ une base de E et $(v_i)_{i=1}^n = (\varphi(u_i)) \in F^n$, l'image de $\mathcal{B}$ par φ .

Alors :

1. $\text{Im}(\varphi) = \text{vect}((v_i)_{i=1}^n)$
2. φ est injective si, et seulement, si la famille $(v_i)_{i=1}^n$ est une famille libre de F .
3. φ est surjective si, et seulement, si la famille $(v_i)_{i=1}^n$ est une famille génératrice de F .
4. φ est un isomorphisme (i.e. φ est bijective) si, et seulement, si la famille $(v_i)_{i=1}^n$ est une base de F .

Exemple I.11. Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto (P(0), P'(0), \frac{P''(0)}{2}) \end{cases}$

Montrons que φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$ vers $\mathbb{K}^3$.

II Espaces vectoriels de dimensions finies

II.1 Définition

Remarque II.1. Nous définissons tout d'abord la notion d'espace vectoriel de dimension finie. La notion de dimension sera définie dans un second temps après que nous ayons fait tout le travail préalable nécessaire.

Définition II.1 (Espace vectoriel de dimension finie). Soit E un espace vectoriel.

L'espace vectoriel E est un espace vectoriel de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie $(u_i)_{i=1}^m$. Dans le cas contraire, E est un espace vectoriel de dimension infinie.

Exemple II.1. 1. $\mathbb{K}^n$ est engendré par les n vecteurs $(u_1, u_2, \dots, u_n) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. $\mathbb{K}^n$ est donc

un espace vectoriel de dimension finie.

2. $\mathbb{K}_n[X]$ est engendré par $(1, X, X^2, \dots, X^n)$. $\mathbb{K}_n[X]$ est donc un sous-espace vectoriel de dimension finie.
3. Montrons que $\mathbb{K}[X]$ est un espace vectoriel de dimension infinie.

II.2 Bases d'un espace vectoriel de dimension finie

Théorème II.1 (Théorème de la base incomplète). Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $(e_i)_{i=1}^p \in E^p$ une famille libre de E .

Alors, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(e_i)_{i=p+1}^n \in E^{n-p}$ une famille de vecteurs telle que $(e_i)_{i=1}^n$ soit une base de E .

Remarque II.2. La famille $(e_i)_{i=1}^p$ est libre et engendre $\text{vect}(e_1, \dots, e_p)$. Elle est donc une base de $\text{vect}(e_1, \dots, e_p)$. Cependant, a priori : $\text{vect}(e_1, \dots, e_p) \neq E$. En ce sens, elle est incomplète d'où le nom du théorème.

Lemme II.1 (Ajout d'un vecteur à une famille libre). Soient $(e_i)_{i=1}^p$ une famille libre de E et $e_{p+1} \in E$.

Si la famille $(e_i)_{i=1}^{p+1}$ est liée, alors e_{p+1} est une combinaison linéaire des vecteurs $(e_i)_{i=1}^p$, i.e. $e_{p+1} \in \text{vect}(e_1, \dots, e_p)$.

Démonstration. On suppose que la famille $(e_i)_{i=1}^{p+1}$ est liée.

Il existe $(\alpha_i)_{i=1}^{p+1} \neq (0, \dots, 0)$ tel que : $\sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i \cdot e_i = 0_E$.

Si $\lambda_{p+1} = 0$, alors $\sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot e_i = 0_E$. Puisque la famille $(e_i)_{i=1}^p$ est libre, on en déduit alors que $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$.

Ceci ne peut se produire.

Donc, $\lambda_{p+1} \neq 0$.

Puisque $\sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i \cdot e_i = \lambda_{p+1} \cdot e_{p+1} + \sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot e_i = 0_E$, on en déduit que : $e_{p+1} = -\sum_{i=1}^p \frac{\alpha_i}{\lambda_{p+1}} \cdot e_i$. □

Démonstration du théorème de la base incomplète. Soit $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_m) \in E^m$ une famille génératrice de E .

On note $E_k = \text{vect}(e_1, \dots, e_p, u_1, \dots, u_k)$.

Montrons par récurrence sur k que pour tout $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$, on peut compléter la famille $(e_1, \dots, e_p)$ en une base $\mathcal{B}_k = (e_1, \dots, e_{p_k})$ de E_k .

Remarque II.3. La démonstration que nous proposons mettra en évidence une méthode pour compléter une famille libre en une base à l'aide des vecteurs d'une famille génératrice.

Initialisation : On a : $E_0 = \text{vect}(e_1, \dots, e_p)$.

Puisque la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre, elle est une base de E_0 .

Hérédité : Soit $k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$.

On suppose que E_k admet une base $\mathcal{B}_k$ de la forme $\mathcal{B}_k = (e_1, \dots, e_{p_k})$.

On a : $E_k = \text{vect}(e_1, \dots, e_p, u_1, \dots, u_k)$ et $E_{k+1} = \text{vect}(e_1, \dots, e_p, u_1, \dots, u_k, u_{k+1})$.

Puisque $\mathcal{B}_k$ est une base de E_k , on en déduit que $(e_1, \dots, e_{p_k}, u_{k+1})$ est une famille génératrice de E_{k+1} .

Si $(e_1, \dots, e_p, u_{k+1})$ est libre, alors on pose $e_{p_{k+1}} = u_{k+1}$ et $\mathcal{B}_{k+1} = (e_1, \dots, e_{p_{k+1}})$.

Sinon, par le lemme précédent, $u_{k+1} \in E_k$ et donc $E_k = E_{k+1}$. On pose alors : $\mathcal{B}_{k+1} = \mathcal{B}_k$.

Dans les deux cas, $\mathcal{B}_k$ est une base de E_k .

La propriété est donc héréditaire.

On en déduit en particulier que E_m admet une base $\mathcal{B}_m = (e_1, \dots, e_{p_m})$.

Or : $E = \text{vect}(u_1, \dots, u_m) \subset E_m = \text{vect}(e_1, \dots, e_p, u_1, \dots, u_m)$.

D'où $E = E_m$.

La famille $\mathcal{B}_m = (e_1, \dots, e_{p_m})$ est donc une base de E . $\square$

Corollaire II.1 (Existence d'une base). *Un espace vectoriel de dimension finie non réduit au vecteur nul admet une base.*

Démonstration. Soit $e_1 \in E \setminus \{0_E\}$. La famille (e_1) est une famille libre. Par le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base de E . $\square$

Corollaire II.2 (Construction d'une base à partir d'une famille génératrice). *Soit $(u_i)_{i=1}^m$ une famille génératrice d'un espace vectoriel de dimension finie non réduit au vecteur nul.*

Alors, on peut extraire une sous-famille de la famille $(u_i)_{i=1}^m$ qui est une base de E .

Exemple II.2. Complétons la famille libre $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ à l'aide de la famille génératrice $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

III Dimension

III.1 Définition

Lemme III.1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(u_i)_{i=1}^n$ une famille de n vecteurs. Soit $(v_j)_{j=1}^{n+1}$ une famille de $n+1$ vecteurs qui sont des combinaisons linéaires des vecteurs $(u_i)_{i=1}^n$.*

Alors, la famille $(v_j)_{j=1}^{n+1}$ est liée.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n .

Initialisation : On suppose que $n = 1$.

Il existe alors $\alpha_1 \in \mathbb{K}$ et $\alpha_2 \in \mathbb{K}$ tel que $v_1 = \alpha_1 u_1$ et $v_2 = \alpha_2 u_1$.

Les vecteurs v_1 et v_2 sont donc colinéaires. La famille (v_1, v_2) est liée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose le lemme vrai au rang $n-1$.

On traite deux cas :

1. Si la famille $(v_j)_{j=1}^{n+1}$ est engendré par la famille $(u_i)_{i=1}^{n-1}$, alors la famille $(v_j)_{j=1}^n$ et donc la famille $(v_j)_{j=1}^{n+1}$ sont liées.
2. Si la famille $(v_j)_{j=1}^{n+1}$ n'est pas engendré par la famille $(u_i)_{i=1}^{n-1}$:
La famille $(v_j)_{j=1}^{n+1}$ n'est pas engendré par la famille $(u_i)_{i=1}^n$. Il existe donc $(\alpha_{i,j})_{\substack{i=1 \dots n \\ j=1 \dots n+1}} \in \mathbb{K}^{n^2+n}$ tel

$$\text{que } \forall j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \quad v_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} u_i.$$

Puisque la famille $(v_j)_{j=1}^{n+1}$ n'est pas engendré par la famille $(u_i)_{i=1}^{n-1}$, il existe au moins un coefficient α_{n,j_0} non nul. Pour simplifier les notations, nous supposons que $j_0 = n+1$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } v_1 &= \alpha_{1,1} \cdot u_1 + \alpha_{2,1} \cdot u_2 + \dots + \alpha_{n-1,1} \cdot u_{n-1} + \alpha_{n,1} \cdot u_n \\ v_2 &= \alpha_{1,2} \cdot u_1 + \alpha_{2,2} \cdot u_2 + \dots + \alpha_{n-1,2} \cdot u_{n-1} + \alpha_{n,2} \cdot u_n \\ &\vdots \\ v_n &= \alpha_{1,n} \cdot u_1 + \alpha_{2,n} \cdot u_2 + \dots + \alpha_{n-1,n} \cdot u_{n-1} + \alpha_{n,n} \cdot u_n \\ v_{n+1} &= \alpha_{1,n+1} \cdot u_1 + \alpha_{2,n+1} \cdot u_2 + \dots + \alpha_{n-1,n+1} \cdot u_{n-1} + \underbrace{\alpha_{n,n+1}}_{\neq 0} \cdot u_n \end{aligned}$$

A la manière d'un pivot de Gauss, nous utilisons le coefficient $\alpha_{n,n+1}$ pour éliminer le vecteur u_n des n premières égalités.

On pose, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $w_j = v_j - \frac{\alpha_{n,j}}{\alpha_{n,n+1}} v_{n+1}$.

$$\begin{aligned} \text{On a alors : } \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad w_j &= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i,j} \cdot u_i + \alpha_{n,j} \cdot u_n \right)}_{=v_j} - \frac{\alpha_{n,j}}{\alpha_{n,n+1}} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i,n+1} \cdot u_i + \alpha_{n,n+1} \cdot u_n \right)}_{=v_{n+1}} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\alpha_{i,j} - \frac{\alpha_{n,j}}{\alpha_{n,n+1}} \alpha_{i,n+1} \right) \cdot u_i \end{aligned}$$

Les vecteurs $(w_j)_{j=1}^n$ est engendré par les vecteurs $(u_i)_{i=1}^{n-1}$.

Par l'hypothèse de récurrence, la famille $(w_j)_{j=1}^n$ est donc une famille liée.

Il existe donc $(\beta_j)_{j=1}^n \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tel que : $0_E = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot w_j = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot \left(v_j - \frac{\alpha_{n,j}}{\alpha_{n,n+1}} v_{n+1} \right)$

$$= \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot v_j - \left(\sum_{j=1}^n \beta_j \cdot \frac{\alpha_{n,j}}{\alpha_{n,n+1}} \right) v_{n+1}$$

On pose : $\beta_{n+1} = - \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot \frac{\alpha_{n,j}}{\alpha_{n,n+1}}$.

On a alors : $\sum_{j=1}^{n+1} \beta_j \cdot v_j = 0_E$.

Puisque $(\beta_j)_{j=1}^n \neq (0, \dots, 0)$, on en déduit que $(\beta_j)_{j=1}^{n+1} \neq (0, \dots, 0)$.

La famille $(v_j)_{j=1}^{n+1}$ est donc liée.

La propriété est donc héréditaire. On en déduit le lemme. □

Théorème III.1 (Définition de la dimension). *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors, toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé la dimension de E et il est noté $\dim(E)$.*

Remarque III.1. 1. *S'il y a une ambiguïté possible, on note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ la dimension de E pour spécifier le corps de base de l'espace vectoriel E .*
 2. *La dimension d'un espace vectoriel réduit au vecteur nul est 0.*

Démonstration. Soient $\mathcal{B} = (u_i)_{i=1}^n$ et $\mathcal{B}' = (v_i)_{i=1}^p$ deux bases de E .

On suppose par l'absurde que $p > n$.

Ainsi, la famille $(v_i)_{i=1}^{n+1}$ est une famille libre.

D'autre part, puisque $\mathcal{B}$ est une base de E , la famille de vecteurs $(v_i)_{i=1}^{n+1}$ est engendrée par la famille $(u_i)_{i=1}^n$. Par le lemme précédent, la famille $(v_i)_{i=1}^{n+1}$ est liée.

On aboutit donc à une contradiction.

On en déduit que $p \leq n$.

De même, on obtient $n \geq p$ et donc : $n = p$ □

Exemple III.1. 1. *Une base de $\mathbb{K}$ est (1) donc : $\dim(\mathbb{K}) = 1$.*

2. *Une base du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$ est (1, i). Donc : $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$*

3. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{K}^n$. Donc : $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.

4. $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Donc : $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$.

Définition III.1 (Droite et plan vectoriels). 1. *Une droite vectorielle est un espace vectoriel de dimension 1.*
 2. *Un plan vectoriel est un espace vectoriel de dimension 2.*

Définition III.2 (Dimension d'un sous-espace affine). *Soit $F \subset E$ un sous-espace affine de E . Si $\vec{F}$ est un espace vectoriel de dimension finie, alors La dimension de F est $\dim(F) = \dim(\vec{F})$.*

Proposition III.1 (Famille libre ou génératrice d'un espace vectoriel de dimension finie). *Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$. Soit $(u_i)_{i=1}^p \in E^p$ une famille de vecteurs de E . Alors,*

1. *Si $(u_i)_{i=1}^p$ est une famille libre de E , alors $p \leq n$. De plus, si $n = p$, alors $(u_i)_{i=1}^p$ est une base de E .*
2. *Si $(u_i)_{i=1}^p$ est une famille génératrice de E , alors $p \geq n$. De plus, si $n = p$, alors $(u_i)_{i=1}^p$ est une base de E .*

Exemple III.2. *Montrons que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*

III.2 Isomorphisme

Lemme III.2. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$.

Alors, E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

i.e. : il existe un isomorphisme de E dans $\mathbb{K}^n$.

Théorème III.2 (Espace vectoriel de même dimension). Soit E et E' deux espaces vectoriels de dimension finie.

Alors $\dim(E) = \dim(E')$ si, et seulement si, ils sont isomorphes.

Exemple III.3. On a : $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = \dim(\mathbb{K}^{n+1}) = n + 1$.

$\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}^{n+1}$ sont isomorphes.

III.3 Produit de deux espaces vectoriels

Lemme III.3 (Base d'un produit de deux espaces vectoriels). Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.

Soient $(u_i)_{i=1}^n$ une base de E et $(v_j)_{j=1}^p$ une base de F .

Alors, $((u_1, 0_F), (u_2, 0_F), \dots, (u_n, 0_F), (0_E, v_1), (0_E, v_2), \dots, (0_E, v_p))$ est une base de $E \times F$.

Corollaire III.1 (Dimension d'un produit de deux espaces vectoriels). Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.

Alors, $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$

IV Dimension d'un sous-espace vectoriel

Dans toute la suite, E désigne un espace vectoriel de dimension finie.

IV.1 Premières propriétés

Théorème IV.1 (Dimension d'un sous-espace vectoriel). Soit $F \subset E$ un sous espace vectoriel de E .

Alors :

1. F est un espace vectoriel de dimension finie.
2. $\dim(F) \leq \dim(E)$
3. Si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.

IV.2 Rang d'une famille de vecteurs

Définition IV.1 (Rang d'une famille de vecteurs). Soit $(u_i)_{i=1}^p$ une famille de vecteurs de E .

Le rang de la famille $(u_i)_{i=1}^p$ est l'entier noté $\text{rg}((u_i)_{i=1}^p)$ tel que :

$$\text{rg}((u_i)_{i=1}^p) = \dim(\text{vect}((u_i)_{i=1}^p))$$

Le rang est donc la dimension du sous espace vectoriel engendré par la famille $(u_i)_{i=1}^p$.

Remarque IV.1. Ici, E n'est pas nécessairement un espace vectoriel de dimension finie.

Exemple IV.1. Déterminons le rang de $(u, v, w) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$.

Proposition IV.1 (Propriétés élémentaires du rang). Soit $(u_i)_{i=1}^p$ une famille de vecteurs de E . Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, σ une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui-même et $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $i \neq j$.

Alors :

1. $\text{rg}((u_i)_{i=1}^p) \leq p$
De plus, il y a égalité si, et seulement si, $(u_i)_{i=1}^p$ est libre.
2. Si E est de dimension finie, $\text{rg}((u_i)_{i=1}^p) \leq \dim(E)$
3. $\text{rg}((u_{\sigma(i)})_{i=1}^p) = \text{rg}((u_i)_{i=1}^p)$ (L'ordre des vecteurs ne modifie pas le rang.)
4. Si $\lambda \neq 0$, $\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, \lambda u_i, u_{i+1}, \dots, u_p) = \text{rg}((u_i)_{i=1}^p)$
5. $\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i + \lambda u_j, u_{i+1}, \dots, u_p) = \text{rg}((u_i)_{i=1}^p)$

$$6. \operatorname{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p, 0_E) = \operatorname{rg}((u_i)_{i=1}^p)$$

Remarque IV.2. En pratique, on applique ces règles de manières répétées jusqu'à faire apparaître une famille libre. Pour cela, on applique la technique du pivot de Gauss mais au lieu de travailler sur les lignes des équations, on travaille sur les vecteurs colonnes.

Exemple IV.2. Déterminons $\operatorname{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$.

IV.3 Somme de sous-espaces vectoriels

Lemme IV.1. Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Alors, l'application $\varphi : \begin{cases} F_1 \times F_2 & \longrightarrow & E \\ (u_1, u_2) & \longmapsto & u_1 + u_2 \end{cases}$ est un isomorphisme.

Démonstration. Nous encourageons très vivement le lecteur de ce document à rédiger la démonstration de ce résultat. $\square$

Proposition IV.2. Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Alors : $\dim(E) = \dim(F_1) + \dim(F_2)$

Lemme IV.2. Soit F un sous-espace vectoriel de E .

Alors, F admet un sous-espace vectoriel supplémentaire.

Théorème IV.2 (Formule de Grassmann). Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

Alors :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Exemple IV.3. Soient P_1 et P_2 deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Montrons que $\dim(P_1 \cap P_2) \in \{1, 2\}$.

Proposition IV.3 (Caractérisation de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires). Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E .

Alors, les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E .
2. $\dim(F_1) + \dim(F_2) = \dim(E)$ et $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$
3. $\dim(F_1) + \dim(F_2) = \dim(E)$ et $F_1 + F_2 = E$

V Applications linéaires en dimension finie

V.1 Théorème du rang

Lemme V.1. Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire et H un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\ker(\varphi)$ dans E .

Alors $\tilde{\varphi} : \begin{cases} H & \longrightarrow & \operatorname{Im}(\varphi) \\ u & \longmapsto & \varphi(u) \end{cases}$ est un isomorphisme.

Théorème V.1 (Théorème du rang).

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire où E est un espace vectoriel de dimension finie.

Alors :

$$\dim(E) = \dim(\ker(\varphi)) + \dim(\operatorname{Im}(\varphi))$$

Remarque V.1. Dans ce théorème, il n'est pas nécessaire que F soit un espace vectoriel de dimension finie.

Exemple V.1. Étude des hyperplans d'un espace vectoriel de dimension finie.

Définition V.1 (Hyperplan). Un hyperplan H est le noyau d'une forme linéaire non nulle. i.e. H est un hyperplan si, et seulement si, il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tel que $H = \ker(\varphi)$.

Dans ces conditions, puisque $\varphi \neq 0$, $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{K}$.

D'après le théorème du rang, on a : $\dim(H) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(\varphi)) = \dim(E) - 1$.

Réciproquement, si $\dim(H) = \dim(E) - 1$, alors H est un hyperplan.

En effet, H admet un sous-espace vectoriel supplémentaire F dans E . On a alors : $\dim(F) = \dim(E) - \dim(H) = 1$.

Ainsi, F est une droite vectorielle engendrée par un vecteur v_0 . Tout vecteur $u \in E$ s'écrit alors de manière unique sous la forme $u = v + \alpha.v_0$ où $\alpha \in \mathbb{K}$ et $v \in H$. L'application qui à u , associe α est une forme linéaire dont le noyau est H .

Les hyperplans d'un espace vectoriel de dimension finie sont les sous-espaces vectoriels de dimension $\dim(E) - 1$.

Corollaire V.1 (Absence d'injectivité ou de surjectivité automatique). Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors :

1. Si $\dim(E) > \dim(F)$, alors l'application φ n'est pas injective.
2. Si $\dim(E) < \dim(F)$, alors l'application φ n'est pas surjective.

V.2 Rang d'une application linéaire

Définition V.2. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.

Le rang de φ est noté $\text{rg}(\varphi)$ et vaut : $\text{rg}(\varphi) = \dim(\text{Im}(\varphi))$.

Remarque V.2. Le théorème du rang se reformule ainsi : $\dim(E) = \dim(\ker(\varphi)) + \text{rg}(\varphi)$.

Proposition V.1 (Rang et image d'une base). Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(e_i)_{i=1}^n$ une base de E .

Alors : $\text{rg}(\varphi) = \text{rg}\left(\left(\varphi(e_i)\right)_{i=1}^n\right)$

Exemple V.2. Déterminons le rang de f :
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + y + 2z \\ 2x + y + 3z \\ x + 2y + 3z \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

V.3 Isomorphismes

Théorème V.2 (Caractérisation d'un isomorphisme en dimension finie). Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux espaces vectoriels tels que $\dim(E) = \dim(F)$.

Alors, les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. φ est un isomorphisme.	3. φ est surjective.
2. φ est injective.	
2'. $\ker(f) = \{0_E\}$	3'. $\text{Im}(\varphi) = F$

Rappel 1. Le groupe linéaire de E noté $Gl(E)$ est l'ensemble des automorphismes de E .

Corollaire V.2 (Caractérisation des automorphismes). Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

Alors, les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. φ est un automorphisme.	3. φ est surjective.
2. φ est injective.	
2'. $\ker(f) = \{0_E\}$	3'. $\text{Im}(\varphi) = E$

Exemple V.3. Montrons que f :
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x + y \\ 3x + y \end{pmatrix} \end{array} \right. \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}^2.$$

V.4 Composition

Proposition V.2 (rang d'une composée). Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

Alors :

1. $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(g)$	2. $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(f)$
Si f est surjective, alors : $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(g)$.	Si g est injective, alors : $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$.