Algèbre-Chapitre 11

Matrices

Introduction

Dans un espace vectoriel de dimension finie, un vecteur est caractérisé par ses coordonnées dans une base fixée et une application linéaire par l'image d'une base. Ainsi, si l'on considère une application entre deux espaces vectoriels de dimension finie, elle est entièrement caractérisée par les coordonnées des vecteurs de l'image d'une base. Nous pouvons répartir ces coordonnées dans un tableau. Par conséquent, une telle application linéaire est caractérisée par un tableau de nombres appelé matrice.

Plus précisément, on considère une application linéaire $\varphi : E \longrightarrow F$ entre deux espaces vectoriels de dimension finie. Soient $\mathcal{B} = (e_j)_{j=1}^{m}$ une base de E et $\mathcal{C} = (f_i)_{i=1}^{n}$ une base de F.

On pose, pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, $(a_{i,j})_{i=1..n} = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = (f(e_j))_{\mathcal{C}}$.

On obtient alors le tableau suivant : $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1\ldots n \\ j=1\ldots m}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,m} \end{pmatrix}$ appelé matrice de l'application φ de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$.

Il se pose alors beaucoup de questions :

1. (a) Comment calculer l'image d'un vecteur par l'application φ ?
   (b) Comment calculer $\ker(\varphi)$?
   (c) Comment calculer $\mathrm{Im}(\varphi)$?

   Tout cela se traduira en termes de coordonnées dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

   Remarque .1. *On fera bien attention que la matrice d'une application linéaire dépend très fortement des bases de départ et d'arrivée.*
2. Quelle est la matrice d'une somme d'applications linéaires ?
   Nous définirons la somme des matrices.
3. Quelle est la matrice de la composée de deux applications linéaires ?
   Nous définirons le produit matriciel.
4. Quelle est la matrice de la réciproque d'un isomorphisme ?
   Nous définirons la matrice inverse d'une matrice (lorsqu'elle existe).
5. Comment changer de bases ?
   On la multipliera par des matrices bien choisies.

Remarque .2. *L'année prochaine vous apprendrez la réduction des matrices. Cet ensemble de techniques permet de changer de bases pour simplifier les matrices.*

I Espace des matrices

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

I.1 Définition

Définition I.1 (Matrice)**.** *Soit $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.*
Une matrice de type (m,n) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une famille $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}}$ telle que : $\forall i \in [\![1,m]\!]\ \forall j \in [\![1,n]\!] \quad a_{i,j} \in \mathbb{K}$.
On la note :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \dots & a_{i,j} & \dots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & \dots & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

A est une matrice à m lignes et à n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de type (m,n) à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Si $m = n$, on le note également : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque I.1. *Le coefficient $a_{i,j}$ est le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.*
Une matrice est dite nulle si tous ses coefficients sont nuls.

Vocabulaire I.1.

1. *On appelle matrice colonne une matrice qui n'a qu'une seule colonne. Ce sont les éléments de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ où $m \in \mathbb{N}$.*
2. *On appelle matrice ligne une matrice qui n'a qu'une seule ligne. Ce sont les éléments de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ où $n \in \mathbb{N}$.*

Notation I.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.*

1. *On note C_j la $j^{\text{ème}}$ colonne de A. i.e. $C_j = (a_{i,j})_{i=1\dots m} = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.*
2. *On note L_i la $i^{\text{ème}}$ ligne de A. i.e. $L_i = (a_{i,j})_{j=1\dots n} = (a_{i,1}, \dots, a_{i,n}) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.*
3. *On note alors également : $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} = (C_1, \dots, C_n)$.*

Exemple I.1. *On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \in$.*

On a : $L_1 =$ et $C_2 =$

I.2 Structure d'espace vectoriel

I.2.a Opérations

Définition I.2. *Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B = (b_{i,j})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*
On définit une loi de composition interne $+$ et une loi de composition externe $.$ sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ par :

1. $A+B=(a_{i,j}+b_{i,j})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}}$
2. $\lambda.A=(\lambda a_{i,j})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}}$

Proposition I.1. *$(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

I.2.b Base canonique

Notation I.2. *Symbole de Kronecker : $\delta_{i,j}=\begin{cases}1 \text{ si } i=j\\ 0 \text{ si } i\neq j\end{cases}$*

Définition I.3. *Soit $(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$. Soit $(i,j)\in[\![1,m]\!]\times[\![1,n]\!]$.*

On note : $E_{i,j}^{(m,n)}=(\delta_{i,k}\delta_{j,l})_{\substack{k=1\dots m\\ l=1\dots n}}=$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & & j^{\text{ème}}\ \text{colonne} & & & \end{array} \\ i^{\text{ème}}\ \text{ligne} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Proposition I.2. *La famille $\left(E_{i,j}^{(m,n)}\right)_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots m}}$ est une base de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ appelée base canonique de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.*
En particulier : $\dim(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}))=mn$ et $\dim(\mathcal{M}_{n}(\mathbb{K}))=n^2$.

Démonstration. (Idée de preuve) Soit $A=(a_{i,j})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}}\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
On remarque que : $A=\displaystyle\sum_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}} a_{i,j}E_{i,j}^{(m,n)}$. □

I.3 Produit matriciel

I.3.a Définition

Définition I.4. *Soit $(m,n,p)\in(\mathbb{N}^*)^3$. Soient $A=(a_{i,j})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}}\in\mathcal{M}_{m,\mathbf{n}}(\mathbb{K})$ et $B=(b_{j,k})_{\substack{j=1\dots n\\ k=1\dots p}}\in\mathcal{M}_{\mathbf{n},p}(\mathbb{K})$.*
Le produit de A par B est la matrice $AB=(c_{i,k})_{\substack{i=1\dots m\\ k=1\dots p}}\in\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall(i,k)\in[\![1,m]\!]\times[\![1,p]\!]\qquad c_{i,k}=\sum_{j=1}^{\mathbf{n}}a_{i,j}b_{j,k}$$

Exemple I.2. 1. (a) $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&3\end{pmatrix}=$

(b) $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=$

(c) $\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}=$

2. (a) *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$.

   On a : $A.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \qquad , A.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \qquad , A.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$

   et : $A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

   (b) *Plus généralement, soit* $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *et* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

   Alors : $$AX = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1,k}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{m,k}x_k \end{pmatrix}$$
   $$= x_1C_1 + x_2C_2 + \dots x_nC_n$$

   En particulier, on a : $A\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ i^{\text{ème}}\,\text{ligne} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = C_i.$

Remarque I.2. *La* $j^{\text{ème}}$ *colonne de* AB *est* $A.C_j(B)$ *où* $C_j(B)$ *désigne la* $j^{\text{ème}}$ *colonne de* B.

I.3.b Propriétés algébriques

Définition I.5 (Matrice identité)**.** *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$.
On appelle matrice identité d'ordre n *et on note :*

$$I_n = (\delta_{i,j})_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple I.3. $I_1 = \qquad , I_2 = \qquad\qquad , I_3 = \qquad\qquad\qquad , \dots$

Proposition I.3 (Propriétés de la multiplication matricielle)**.** *Soit* $(m, n, p, q) \in (\mathbb{N}^*)^4$, $(A, A_1, A_2) \in (\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}))^3$, $(B, B_1, B_2) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^3$ *et* $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
Alors :

1. $(A.B).C = A.(B.C)$ *(associativité)*

2. $(A_1 + A_2).B = A_1.B + A_2.B$ *(distributivité à gauche)*

3. $A.(B_1 + B_2) = A.B_1 + A.B_2$ *(distributivité à droite)*

4. $I_m.A = A$

5. $A.I_n = A$

Proposition I.4 (Bilinéarité du produit matricielle)**.** *Soit* $(m,n,p) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $(A, A_1, A_2) \in (\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}))^3$, $(B, B_1, B_2) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^3$ *et* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.
Alors :

1. $(\alpha A_1 + \beta A_2).B = \alpha.A_1.B + \beta.A_2.B$ 2. $A.(\alpha B_1 + \beta B_2) = \alpha.A.B_1 + \beta.A.B_2$.

Remarque I.3. *En particulier, on a :* $(\alpha.A).B = A.(\alpha.B) = \alpha.(A.B)$

I.4 Transposition

Définition I.6 (Transposée)**.** *Soit* $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. *Soit* $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
On appelle transposée de A et on note :

$$^tA = (b_{j,i})_{\substack{j=1\dots n\\ i=1\dots m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$$

tel que : $\forall i \in [\![1\dots n]\!]\ \forall j \in [\![1\dots m]\!] \qquad b_{j,i} = a_{i,j}$.

Exemple I.4.

1. $^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} =$

2. $^t\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$

3. $^t\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} =$

4. $^t\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{pmatrix} =$

5. $^t\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} =$

Proposition I.5 (Transposée de la transposée, transposée d'un produit)**.**

1. *L'application* $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & {}^tA \end{array}\right.$ *est un isomorphisme linéaire de bijection réciproque* $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & {}^tA \end{array}\right.$
   En particulier, on a :
   $$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \quad {}^t\left({}^tA\right) = A$$

2. *Soit* $(m, n, p) \in (\mathbb{N}^*)^3$. *Soient* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
   Alors :
   $${}^t(AB) = \left({}^tB\right)\left({}^tA\right)$$

II Matrice d'une application linéaire

II.1 Matrice d'une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^m$

II.1.a Matrice d'un vecteur

Définition II.1. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$.
La matrice associée à un vecteur $(x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n$ *est la matrice colonne :* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ s'identifie à leurs matrices colonnes associées de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Plus précisément, on a la proposition suivante :

Proposition II.1. *L'application* $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ (x_i)_{i=1}^n & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array}\right.$ *est un isomorphisme linéaire.*

Dorénavant, on identifiera les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ à leurs matrices colonnes associées.

II.1.b Définition et premières propriétés

Notation II.1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on note* $\mathcal{B}_n$ *la base canonique de* $\mathbb{K}^n$.

Définition II.2 (Matrice entre deux bases canoniques)**.** *Soit* $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. *Soit* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$.
On note : $\mathcal{B}_n = (e_i)_{i=1}^n$.

On appelle matrice de f de $\mathcal{B}_n$ dans $\mathcal{B}_m$ la matrice : $M_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_m}(f) = (a_{i,j})_{\substack{i=1..m\\ j=1..n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *telle que :*

$$\forall j \in [\![1,n]\!] \quad \begin{pmatrix} a_{j,1} \\ \vdots \\ a_{j,m} \end{pmatrix} = f(e_j)$$

Remarque II.1. *La $j^{\text{ème}}$ colonne de $M_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_m}(f)$ est l'image par f du $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique $\mathcal{B}_n$.*

Exemple II.1. 1. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \\ ex+fy \end{pmatrix} \end{array} \right.$.

   On a alors : $M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(f) =$

2. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \end{array} \right.$.

   On a alors : $M_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$

Proposition II.2. 1. *Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & AX = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array} \right.$.

   Alors, A est la matrice de f de $\mathcal{B}_n$ dans $\mathcal{B}_m$. i.e. $A = M_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_m}(f)$

2. *L'application* $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^m) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & M_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_m}(f) \end{array} \right.$ *est un isomorphisme appelé isomorphisme canonique.*

Proposition II.3 (Matrice d'une composée)**.** *Soit $(m,n,p) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^m)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^m,\mathbb{K}^p)$.*
Alors :

$$M_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_p}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}_m,\mathcal{B}_p}(g).M_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_m}(f)$$

Exemple II.2. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ y \\ x+z \end{pmatrix} \end{array} \right.$ *et* $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x+y \\ y+z \end{pmatrix} \end{array} \right.$.

1. *Préciser $A = M_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_3}(f)$ et $B = M_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_2}(g)$.*
2. *Déterminer $C = M_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_2}(g \circ f)$ de deux manières différentes.*
3. *Calculer $(g \circ f)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ à l'aide de la matrice C.*

II.1.c Image et noyau d'une matrice

Définition II.3 (Image, noyau et rang d'une matrice)**.** *Soit* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$*.*

1. *On appelle noyau de* A *l'ensemble :*
$$\ker(A) = \{X \in \mathbb{K}^n \ / \ AX = 0\}$$
2. *On appelle image de* A *l'ensemble :*
$$\mathrm{Im}(A) = \{AX \in \mathbb{K}^m \ / \ X \in \mathbb{K}^n\}$$
3. *On note :* $\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$

Remarque II.2. $\ker(A)$ *et* $\mathrm{Im}(A)$ *sont le noyau et l'image de l'application* $(X \longmapsto AX)$*.*

Proposition II.4 (Caractérisation de l'image et du rang d'une matrice)**.** *On note, à nouveau,* $(C_i)_{i=1}^n$ *les colonnes de* A*.*

1. $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{vect}(C_1, \dots, C_n)$
2. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_n)$

Démonstration. L'image de la base $\mathcal{B}_n$ par $(X \longmapsto AX)$ est $(C_i)_{i=1}^n$. On en déduit le résultat. □

Exemple II.3. *Déterminer une base de l'image et du noyau des matrices* A *et* B *précédentes.*

II.2 Cas général

Dans toute la suite, E, F et G désignent des espaces vectoriels de dimensions finies.

II.2.a Matrice d'un vecteur dans une base

Définition II.4. *Soit* $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^n$ *une base de* E*. Soient* $u \in E$ *et* $(x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n$ *les coordonnées de* u *dans la base* $\mathcal{B}$*.*
La matrice associée au vecteur u *dans la base* $\mathcal{B}$ *est la matrice*
$$(u)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

Proposition II.5. *L'application* $\left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & (u)_{\mathcal{B}} \end{array} \right.$ *est un isomorphisme linéaire.*

II.2.b Définition et premières propriétés

Définition II.5 (Matrice d'une application linéaire (cas général))**.**
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$*.*
Soit $\mathcal{B} = (e_j)_{j=1}^n$ *une base de* E*.*
Soit $\mathcal{C} = (f_i)_{i=1}^m$ *une base de* F*.*
On appelle matrice de f *de la base* $\mathcal{B}$ *dans la base* $\mathcal{C}$ *la matrice* $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = (a_{i,j})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *telle que :*
$$\forall j \in [\![1, n]\!] \quad (a_{i,j})_{i=1\dots m} = (f(e_j))_{\mathcal{C}}$$
i.e. :
$$M_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} (f(e_1))_{\mathcal{C}} & (f(e_2))_{\mathcal{C}} & \dots & (f(e_n))_{\mathcal{C}} \end{pmatrix}$$

Remarque II.3. *La $j^{\text{ème}}$ colonne de $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est formée des coordonnées dans $\mathcal{C}$ de l'image du $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base $\mathcal{B}$.*

Exemple II.4. *Soient $\mathcal{B}_3$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{C} = (1, 1+X, 2X+X^2, 3X^2+X^3)$. Remarquons que la famille $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Soit $\Delta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P+P' \end{array} \right.$. Déterminer $A = M_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_3}(\Delta)$ et $B = M_{\mathcal{B}_3,\mathcal{C}}(\Delta)$. Conclusion ?*

Proposition II.6. *Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F.*

1. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.*
   Alors, l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ X & \longmapsto & M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).X \end{array} \right.$ est l'application linéaire qui, aux coordonnées d'un vecteur u dans la base $\mathcal{B}$, associe celles de $f(u)$ dans $\mathcal{C}$.
   i.e. : $\forall u \in E \quad M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).(u)_{\mathcal{B}} = (f(u))_{\mathcal{C}}$ (relation fondamentale)
2. *L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \end{array} \right.$ est un isomorphisme linéaire.*

Proposition II.7 (Matrice d'une composée)**.** *Soient $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F et $\mathcal{D}$ une base de G.*
Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.
Alors :

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = M_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g).M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$$

Remarque II.4.
- *Si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E, alors : $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).(u)_{\mathcal{B}'}$ <u>n'a strictement aucun sens</u>.*
- *De même, si $\mathcal{C}'$ est une autre base de F, alors $M_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g).M_{\mathcal{B},\mathcal{C}'}(f)$ <u>n'a strictement aucun sens</u>.*

Exemple II.5. *On considère $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & (X+1)P \end{array} \right.$. On note $\mathcal{B}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.*

1. *Calculer $A = M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(\Delta \circ f)$ de deux manières différentes.*
2. *Calculer $\Delta(f(1+2X+3X^2))$ à l'aide de A.*

II.2.c Interprétation de l'image et du noyau d'une matrice

Proposition II.8. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F.*
Alors :

1. $\ker(M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f))$ *est l'ensemble des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs de* $\ker(f)$.
   i.e. $\forall u \in E \quad u \in \ker(f) \iff (u)_{\mathcal{B}} \in \ker(M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f))$
2. $\mathrm{Im}(M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f))$ *est l'ensemble des coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ des vecteurs de* $\mathrm{Im}(f)$.
   i.e. $\forall v \in F \quad v \in \mathrm{Im}(f) \iff (v)_{\mathcal{C}} \in \mathrm{Im}(M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f))$

Exemple II.6. *Soient $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_2$ les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}_2[X]$.*
On considère $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & (X+1)^2P(1) + X^2P(0) + (2X+1)P(-1) \end{array} \right.$
Déterminer $\ker(g)$ *et* $\mathrm{Im}(g)$ *à l'aide de la matrice de $M_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_2}(g)$.*

III Matrices carrées

III.1 Premières propriétés

Définition III.1 (Matrices carrées). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*
On appelle matrice carrée de taille n les matrices de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.
On note : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

Proposition III.1 (Structure algébrique). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*
$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, .)$ *est un anneau non commutatif sauf si $n = 1$.*

En particulier, la formule du binôme de Newton s'applique :

Proposition III.2. *Soient $m \in \mathbb{N}$ et $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ tel que :*
Alors : $(A + B)^m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$

Exemple III.1. *Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.*

Définition III.2. *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base de E et $n = \dim(E)$.*
On a alors : $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On note : $M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ et on l'appelle matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition III.3 (Isomorphisme). *Avec ces notations, l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & M_{\mathcal{B}}(f) \end{array} \right.$*
est un isomorphisme d'espaces vectoriels mais aussi un isomorphisme d'anneaux.
En particulier :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E) \quad M_{\mathcal{B}}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}}(g) \times M_{\mathcal{B}}(f)$$

III.2 Matrices carrées inversibles

Définition III.3. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
On dit que A est inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$AB = BA = I_n$$

On note alors : $A^{-1} = B$.
L'ensemble des matrices carrées de taille n inversibles est noté : $GL_n(\mathbb{K})$.

L'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$. On a donc les propriétés suivantes :

Proposition III.4. *Soit $(A, B) \in (GL_n(\mathbb{K}))^2$.*
Alors :

1. *$AB \in GL_n(\mathbb{K})$ et :*
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
2. *$A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ et :*
$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$
3. *$GL_n(\mathbb{K})$ est un groupe.*

Proposition III.5 (Inverse de la transposée)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in GL_n(\mathbb{K})$.*
Alors, ${}^tA \in GL_n(\mathbb{K})$ et :
$$\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$$

L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & M_{\mathcal{B}}(f) \end{array}\right.$ est un isomorphisme d'anneau. Par conséquent, on a la propriété suivante :

Proposition III.6 (Matrices d'un automorphisme)**.** *Soit $\mathcal{B}$ une base de E.*
Alors :

1. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.*
f est un automorphisme de E (i.e. : $f \in GL(E)$) si, et seulement si, $M_{\mathcal{B}}(f)$ est une matrice inversible.
2. *Mieux, $\left\{\begin{array}{ccc} GL(E) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & M_{\mathcal{B}}(f) \end{array}\right.$ est un isomorphisme de groupe.*
En particulier :
$$M_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (M_{\mathcal{B}}(f))^{-1}$$

Par les propriétés précédentes et les caractérisations des automorphismes d'un espace vectoriel, on déduit le corollaire suivant :

Corollaire III.1 (Caractérisation des matrices inversibles)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
Alors, les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. *A est inversible.*
2. *$(X \mapsto AX)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$.*
3. *Les colonnes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$.*
4. *$(X \mapsto AX)$ est injective.*
5. *Les colonnes de A forment une famille libre.*
6. *$\ker(A) = \{0\}$.*
7. *Il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $BA = I_n$.*
8. *$(X \mapsto AX)$ est surjective.*
9. *Les colonnes de A forme une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$.*
10. *$\mathrm{Im}(A) = \mathbb{K}^n$.*
11. *Il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $AB = I_n$*

Remarque III.1. Méthode de calcul de A^{-1} :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On résout l'équation :

$$AX = Y \qquad (E_Y)$$

d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ avec $Y \in \mathbb{K}^n$ pour paramètre. Si l'équation admet une unique solution, alors A est inversible et A^{-1} est la matrice de l'application qui, à Y, associe la solution X de (E_Y).

Exemple III.2. *Calculer les inverses des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$*

III.3 Matrices carrées particulières

III.3.a Matrices diagonales

Définition III.4. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est dite diagonale si :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad i \neq j \implies a_{i,j} = 0$$

i.e. S'il existe $(\lambda_i)_{i=1}^n \mathbb{K}^n$ tel que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 a_{i,j} = \lambda_i \delta_{i,j}$. i.e. Si A est de la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On note alors : $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Proposition III.7. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, $B = \mathrm{Diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.*

0. (a) $0 = \mathrm{Diag}(0, \dots, 0)$
   (b) $I_n = \mathrm{Diag}(1, \dots, 1)$
1. $\alpha A + \beta B = \mathrm{Diag}(\alpha\lambda_1 + \beta\mu_1, \alpha\lambda_2 + \beta\mu_1, \dots, \alpha\lambda_n + \beta\mu_n)$
2. $AB = \mathrm{Diag}(\lambda_1\mu_1, \lambda_2\mu_2, \dots, \lambda_n\mu_n)$
   En particulier, on a : $\forall k \in \mathbb{N} \quad A^k = \mathrm{Diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k)$
3. $A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \forall i \in [\![1,n]\!] \quad \lambda_i \neq 0$.
   Dans ces conditions, $A^{-1} = \mathrm{Diag}(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$.
   Plus généralement, on a : $\forall k \in \mathbb{Z} \quad A^k = \mathrm{Diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k)$.

Remarque III.2. *Par ces propriétés, l'ensemble des matrices diagonales est, à la fois, un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

III.3.b Matrices triangulaires

Définition III.5. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et et $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

1. *La matrice A est dite triangulaire supérieure si :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad i > j \implies a_{i,j} = 0$$

i.e. A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \dots & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \times & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

2. *La matrice A est dite triangulaire inférieure si :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad i < j \implies a_{i,j} = 0$$

i.e. A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \times & \lambda_2 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \times & \ddots & \ddots & 0 \\ \times & \dots & \dots & \times & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Proposition III.8. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient* $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \dots & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \times & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} \mu_1 & \times & \dots & \dots & \times \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \times & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$ *deux matrices triangulaires supérieures. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.*

0. *0 et I_n sont triangulaires supérieures.*

1. *La matrice $\alpha A + \beta B$ est triangulaire supérieure et :* $\alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} \alpha\lambda_1 + \beta\mu_1 & \times & \dots & \dots \\ 0 & \alpha\lambda_2 + \beta\mu_2 & \ddots & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

2. *La matrice AB est triangulaire supérieure et :* $AB = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & \times & \dots & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2\mu_2 & \ddots & \times & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$

3. *La matrice A est inversible si, et seulement si, $\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \lambda_i \neq 0$. Dans ces conditions,* *A^{-1} est triangulaire supérieure et :* $A^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & \times & \dots & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \ddots & \times & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$

Remarque III.3. *Les résultats précédents sont également vrais dans le cas des matrices triangulaires inférieures.*

Exemple III.3. *Déterminer la matrice inverse de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

III.3.c Matrices symétriques et antisymétriques

Définition III.6. *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et et* $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. *La matrice* A *est dite symétrique si :*
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad i \neq j \implies a_{i,j} = a_{j,i}$$
i.e. si ${}^tA = A$.
On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ *l'ensemble des matrices symétriques de taille* n.
2. *La matrice* A *est dite antisymétrique si :*
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad i \neq j \implies a_{i,j} = -a_{j,i}$$
i.e. si ${}^tA = -A$.
On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ *l'ensemble des matrices antisymétriques de taille* n.

Remarque III.4. *Si* A *est antisymétrique, les coefficients diagonaux sont nuls. (i.e.* $\forall i \in [\![1,n]\!] \quad a_{i,i} = 0$*)*

Exemple III.4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ *est symétrique.* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ *est antisymétrique.*

Proposition III.9. $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ *et* $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ *sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
i.e. : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$

IV Changement de base

IV.1 Matrice de l'application identité - Matrice de passage

Proposition IV.1 (Matrice de l'identité)**.** *Soit* $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^n$ *et* $\mathcal{B}' = (f_i)_{i=1}^n$ *deux bases de* E.
Alors :

1. $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)$ *est une matrice inversible de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Son inverse est $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$.
2. *Sa* $i^{\text{ème}}$ *colonne est :* $C_i = (e_i)_{\mathcal{B}'}$.
3. $\forall u \in E \quad (u)_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E).(u)_{\mathcal{B}}$

Exemple IV.1. *Soit* $\mathcal{B}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *et* $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.
Déterminer $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ *et* $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

Définition IV.1 (Matrice de passage)**.** *Soit* $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^n$ *et* $\mathcal{B}' = (f_i)_{i=1}^n$ *deux bases de* E.
On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ *vers la base* $\mathcal{B}'$ *la matrice notée* $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ *dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de* $\mathcal{B}'$ *dans la base* $\mathcal{B}$. *i.e.* $C_i = (f_i)_{\mathcal{B}}$

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} (f_1)_{\mathcal{B}} & (f_2)_{\mathcal{B}} & \dots & (f_n)_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}$$

Proposition IV.2. *Avec les mêmes notations, on a :*

1. $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = (M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E))^{-1}$
2. $\forall u \in E \quad (u)_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)_{\mathcal{B}'}$
3. *Si on note* $X = (u)_{\mathcal{B}}$, $X' = (u)_{\mathcal{B}'}$, $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, *alors :*

$$X = PX' \text{ et } X' = P^{-1}X$$

Remarque IV.1. *La matrice P est appelée matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$. Cependant, ce n'est pas la matrice de l'application qui, aux coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathcal{B}$, associe les coordonnées de ce vecteur dans la base $\mathcal{B}'$ mais au contraire la matrice de l'application qui, aux coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathcal{B}'$, associe les coordonnées de ce vecteur dans la base $\mathcal{B}$. On a la relation suivante :*

$$P.(u)_{\mathcal{B}'} = (u)_{\mathcal{B}}$$

Exemple IV.2. *On reprend l'exemple précédent. Préciser P, P^{-1}, X et X' pour $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.*

IV.2 Changement de bases de la matrice d'une application linéaire

Problème ?

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F.
Quel lien y a-t-il entre $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ et $M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$?
Comment passer de l'une à l'autre ?

Proposition IV.3 (Changement de bases - Matrice de l'identité)**.**

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = M_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(\mathrm{Id}_F) \times M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \times M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$$

Corollaire IV.1 (Changement de bases - Matrice de passage)**.**

1. $M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = (P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'})^{-1} \times M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \times P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$
2. *Si on note* $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, $B = M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$, $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ *et* $Q = P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$, *alors :*

$$B = Q^{-1}AP$$

Exemple IV.3. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \\ x-2y \end{pmatrix} \end{array} \right.$. *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$,*
$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ *et* $\mathcal{C}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. *Déterminer $M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$.*

IV.3 Changement de base de la matrice d'un endomorphisme

Proposition IV.4 (Changement de bases d'un endomorphisme)**.** *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $f \in \mathcal{L}(E)$.*
Alors :

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = (P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} \times M_{\mathcal{B}}(f) \times P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

i.e. En posant $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ *et* $B = M_{\mathcal{B}'}(f)$, *alors :*

$$B = P^{-1}AP$$

Exemple IV.4. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x+y-z \\ x+2y-z \\ 3x-3y+2z \end{pmatrix} \end{array} \right.$ *. Soit* $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.
Vérifier que $\mathcal{B}'$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$ *et déterminer* $M_{\mathcal{B}'}(f)$.

IV.4 Caractérisation du rang d'une matrice

Théorème IV.1 (caractérisation du rang)**.** *Soit* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *et* $r \in \mathbb{N}$.
Alors, $r = \mathrm{rg}(A)$ *si, et seulement si, il existe* $U \in GL_m(\mathbb{K})$ *et* $V \in GL_n(\mathbb{K})$ *telles que :* $A = UJ_rV$

$$\text{où : } J_r = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}}^{r \text{ colonnes}} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$

Corollaire IV.2 (rang de la transposée)**.**

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$$

Remarque IV.2 (Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes)**.** *Le rang d'une matrice est la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses colonnes. Il est donc invariant par les opérations :*

1. $C_i \longleftarrow C_i + \lambda C_j$ *où* $i \neq j$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$.
2. $C_i \longleftarrow \lambda C_i$ *où* $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
3. $C_i \longleftrightarrow C_j$

Appliqué à ${}^tA$*, cela revient aux opérations sur les lignes suivantes :*

1. $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$ *où* $i \neq j$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$.
2. $L_i \longleftarrow \lambda L_i$ *où* $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
3. $L_i \longleftrightarrow L_j$

Par le corollaire précédent, ces opérations laissent invariants le rang d'une matrice.

Exemple IV.5. *Déterminer le rang de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

V Déterminants

V.1 Déterminant d'une famille de vecteurs

V.1.a Déterminant d'ordre 2

On suppose ici que $\dim(E) = 2$.

Définition V.1 (Déterminant d'ordre 2). *Soit u_1 et u_2 deux vecteurs de E. Soit $\mathcal{B}$ une base de E.*
Soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ *les coordonnées de u_1 et de u_2 dans $\mathcal{B}$.*
On appelle déterminant d'ordre 2 de (u_1, u_2) dans $\mathcal{B}$ et on note :

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - y_1x_2$$

Remarque V.1. *Les coordonnées d'un vecteur dépendent de la base. Il en est de même pour le déterminant.*

Proposition V.1 (propriétés algébriques). *L'application* $\det_{\mathcal{B}}$ *vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Si $u_0 \in E$ et $v_0 \in E$, alors $(v \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(u_0, v))$ et $(u \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(u, v_0))$ sont des applications linéaires. (bilinéarité)*
2. $\forall (u, v) \in E \quad \det_{\mathcal{B}}(u, v) = -\det_{\mathcal{B}}(v, u)$ *(antisymétrie)*
3. $\forall u \in E \quad \det_{\mathcal{B}}(u, u)$ *(alternée)*
4. *Si $(u, v) \in E^2$, alors (u, v) est une base si, et seulement si,* $\det_{\mathcal{B}}(u, v) \neq 0$.

V.1.b Déterminant d'ordre 3

On suppose ici $\dim(E) = 3$.

Définition V.2 (Déterminant d'ordre 3). *Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $(u_1, u_2, u_3) \in E$ de coordonnées respectives* $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$. *On appelle déterminant dans $\mathcal{B}$ de (u_1, u_2, u_3) et on note :*

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2$$

Proposition V.2 (Propriétés algébriques). *L'application* $\det_{\mathcal{B}}$ *vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Si $(u_1, u_2, u_3) \in E^3$, alors $(v \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, v))$, $(v \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(u_1, v, u_3))$ et $(v \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(v, u_2, u_3))$ sont des applications linéaires. (trilinéarité)*
2. $\forall (u_1, u_2, u_3) \in E^3 \quad \begin{cases} \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_3, u_2) = \det_{\mathcal{B}}(u_2, u_1, u_3) = \det_{\mathcal{B}}(u_3, u_2, u_1) = -\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3) \\ \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3) = \det_{\mathcal{B}}(u_2, u_3, u_1) = \det_{\mathcal{B}}(u_3, u_1, u_2) \end{cases}$
   (antisymétrie)
3. $\forall (u_1, u_2) \in E \quad \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_1, u_2) = \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_1) = \det_{\mathcal{B}}(u_2, u_1, u_1) = 0$ *(alternée)*
4. $(u_1, u_2, u_3) \in E^3$ *est une base si, et seulement si,* $\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3) \neq 0$.

V.2 Déterminant d'une matrice et d'un endomorphisme

V.2.a Déterminant d'une matrice

Définition V.3 (déterminant d'une matrice).

1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. *On appelle déterminant de A et on note :*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

2. *Soit* $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. *On appelle déterminant de A et on note :*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

Remarque V.2. *Le déterminant de A est donc le déterminant des colonnes de A.*

Proposition V.3. *Soient $n \in \{2,3\}$ et $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$. On a alors :*

1. $\det(I_n) = 1$
2. $\det(AB) = \det(A).\det(B)$
3. $A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$
4. $\det({}^tA) = \det(A)$

Corollaire V.1 (Déterminant de l'inverse)**.** *Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors* $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Mieux : $\left\{ \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ A & \longmapsto & \det(A) \end{array} \right.$ *est un morphisme de groupe.*

Corollaire V.2 (Formule de changement de base)**.** *Soit $n \in \{2,3\}$. On suppose :* $\dim(E) = n$.
Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit $(u_i)_{i=1}^n \in E^n$.
Alors :

$$\det_{\mathcal{B}'}\left((u_i)_{i=1}^n\right) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}\left((u_i)_{i=1}^n\right)$$

Remarque V.3. *Remarquons que* $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \det(P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}})$.

V.2.b Déterminant d'un endomorphisme

Proposition V.4 (Définition du déterminant d'un endomorphisme)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où* $\dim(E) \in \{2,3\}$.
Le déterminant de la matrice de f dans une base de E est indépendant du choix de la base. On l'appelle déterminant de f et on le note : $\det(f)$.
i.e. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont deux bases de E, alors : $\det\left(M_{\mathcal{B}}(f)\right) = \det\left(M_{\mathcal{C}}(f)\right) = \det(f)$.

Proposition V.5 (Propriétés algébriques)**.** *Soient f et g deux endomorphismes de E.*
Alors :

1. $\det(g \circ f) = \det(g).\det(f)$
2. $\det(f) \neq 0 \iff f \in GL_n(\mathbb{K}) \iff f$ est un automorphisme de E
   De plus, si $\det(f) \neq 0$, *alors :* $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$.

V.3 Techniques de calculs

V.3.a Opérations élémentaires

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $n \in \{2,3\}$, $(i,j) \in \{1,2,3\}$ tel que $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Opérations	Modification du déterminant	Propriétés mises en œuvre
$C_i \longleftarrow C_i + \lambda C_j$ $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$	Invariance	bilinéarité-trilinéarité et alternance
$C_i \longleftrightarrow C_j$ $L_i \longleftrightarrow L_j$	Multiplication par -1	Antisymétrie
$C_i \longleftarrow \lambda C_i$	Multiplication par λ	bilinéarité-trilinéarité

V.3.b Développement par rapport à une ligne ou une colonne

(*cf.* Alg-Chap 3 "Géométrie élémentaire" - Partie II-5 "Produit mixte")

Exemple V.1. *Calculer le déterminant de* $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}$.

VI Systèmes linéaires

VI.1 Matrice d'un système linéaire

Définition VI.1 (Système linéaire, matrice, rang...). *Soit* $(a_{i,j})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} \in \mathbb{K}^{nm}$ *et* $(b_i)_{i=1}^m \in \mathbb{K}^m$. *On considère le système d'inconnue* $(x_j)_{j=1}^n \in \mathbb{K}^n$:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \qquad (S)$$

Alors :

1. *Un tel système est appelé système linéaire à* m *équations et à* n *inconnues.*
2. $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *est appelée matrice du système* (S).
3. $\mathrm{rg}(A)$ *est appelé rang du système* (S).
4. $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ *est appelé second membre du système.*
5. *Si* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, *alors* :
$$(S) \iff AX = B$$

L'équation (S) est une équation linéaire associée à l'application $f : (X \mapsto AX)$. En vertu de la description des solutions des équations linéaires faites lors du premier chapitre d'algèbre linéaire, nous obtenons la proposition suivante :

Proposition VI.1.
1. *Le système* (S) *admet une solution si, et seulement si,* $B \in \mathrm{Im}(f)$
2. *Si* $B = 0$, *alors le système* (S) *est dit "homogène" et l'ensemble des solutions de* (S) *est* $\ker(f)$.
De plus, $\dim(\ker(f)) = n - \mathrm{rg}(A)$.
3. *Dans le cas général, s'il est non vide, l'ensemble des solutions est un sous-ensemble affine de* $\mathbb{K}^n$ *de direction* $\ker(f)$.

Remarque VI.1. *Dans ce dernier cas, on exprime généralement l'ensemble des solutions en exprimant* $\mathrm{rg}(A)$ *inconnues en fonctions des* $n - \mathrm{rg}(A)$ *autres inconnues.*

VI.2 Résolution

Technique :

On applique les opérations élémentaires sur les lignes à A et à B simultanément :

$$\begin{array}{c} A_0 = A \mid B = B_0 \\ \downarrow \\ A_1 \mid B_1 \\ \downarrow \\ \vdots \mid \vdots \\ \downarrow \\ A_n \mid B_n \end{array}$$

On s'arrête lorsque A_n est de la forme :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \times & \dots & \times & 0 & \times & \dots & \times & 0 & \dots \\ \vdots & & & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \times & \dots & \times & 0 & \dots \\ \vdots & & & & & & & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & & & & & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

On a alors $(S) \iff A_nX = B_n$ et on résout le nouveau système.

Remarque VI.2. *On a :* $\forall k \in [\![0, n]\!] \qquad (S) \iff A_kX = B_k$.

Algorithme du pivot de Gauss :

1. **Première étape :**
   Soit $j_0 \in [\![1, n]\!]$ minimal tel que $C_{i_0} \neq 0$.
   Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ minimal tel que $a_{i_0,j_0} \neq 0$.

   (a) La matrice A a donc l'allure suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \times & \dots & \times \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & a_{i_0,j_0} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \times & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \times & \times & \dots & \times \end{pmatrix}$

   On intervertit L_1 et L_{i_0} de A et de B. On obtient la matrice $A_1 = (a^{(1)}_{i,j})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$.

   (b) On fait alors les opérations : $C_i \leftarrow C_i - \dfrac{a^{(1)}_{i,j_0}}{a^{(1)}_{1,j_0}}$ pour $i \neq 1$.

   On obtient la matrice A_2 dont l'allure est la suivante : $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a^{(1)}_{1,j_0} & \times & \dots & \times \\ \vdots & & \vdots & 0 & \times & \dots & \times \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & A'_2 & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \times & \dots & \times \end{pmatrix}$

(c) On applique ces deux premières étapes à A'_2 de manière récursive en conservant la première ligne.

2. **Deuxième étape :**
A la fin de cette première étape, on obtient une matrice $A''_0 = (a''^{(0)}_{i,j})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}}$ de la forme :
$$A''_0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \star & \times & \dots & \times & \times & \times & \dots & \times & \times & \dots \\ \vdots & & & & 0 & \dots & \dots & 0 & \star & \times & \dots & \times & \times & \dots \\ \vdots & & & & & & & & 0 & \dots & \dots & 0 & \star & \dots \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$
où $\star$ désigne des nombres non nuls.
Soit i_1 maximal tel que : $L_{i_1} \neq 0$.
Soit j_1 minimal tel que : $a''^{(0)}_{i_1,j_1} \neq 0$.

(a) On fait alors les opérations suivantes : $L_i \leftarrow L_i - \dfrac{a''^{(0)}_{i,j_1}}{a''^{(0)}_{i_1,j_1}} L_{i_1}$ pour $i \neq i_1$.

(b) On divise L_{i_1} par a_{i_1,j_1}.
On obtient une matrice A''_1 de la forme suivante :
$$A''_1 = \begin{pmatrix} \times & \dots & \times & 0 & \times & \dots & \times \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \times & \dots & \times & 0 & \times & \dots & \times \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \times & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \times \\ \vdots & & & A''_2 & & & \vdots \\ \times & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \times \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(c) On réapplique ces deux étapes à la matrice A''_2 de manière récursive.

Nous obtenons alors la matrice sous la forme voulue.

Remarque VI.3. *Lorsq'une ligne de zéro, il y a deux situations :*

1. *Si la ligne correspondante du second membre est également nulle, on peut supprimer la ligne.*
2. *Sinon, le système n'a pas de solution et on arrête l'algorithme.*

Exemple VI.1. 1. *Résoudre :* $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 5x + 3y + z = 9 \end{cases}$

2. *Résoudre :* $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ x - y - 3z = 7 \end{cases}$

VI.3 Système de Cramer

VI.3.a Définition - Premières propriétés

Définition VI.2 (Système de Cramer)**.** *Soit (S) un système linéaire à n équations et n inconnues.*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de (S) et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ son second membre.
Le système (S) est de Cramer si $A \in GL_n(\mathbb{K})$.

Proposition VI.2. *Soit (S) un système de Cramer de matrice A et de second membre B. Alors, le système (S) admet pour unique solution :*

$$X = A^{-1}B$$

Remarque VI.4. *Pour déterminer les solutions de tous les systèmes de Cramer (S) de matrice A, il suffit donc de calculer A^{-1}. Pour cela, on applique l'algorithme précédent en prenant $B_0 = I_n$ à la place du second membre. La matrice A_N finale est alors I_n et B_N est égale à A^{-1}.*

Exemple VI.2. *Résoudre* $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = \alpha \\ 3x + 5y + 7z = \beta \\ 2x + 2y + z = \gamma \end{cases}$

VI.3.b Système de Cramer d'ordre 2

Théorème VI.1 (Formule de Cramer d'ordre 2). *Soient $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4$ et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$. On étudie :*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = x' \\ a_2x + b_2y = y' \end{cases} \qquad (S)$$

On note : $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_x = \begin{vmatrix} x' & b_1 \\ y' & b_2 \end{vmatrix}$ *et :* $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & x' \\ a_2 & y' \end{vmatrix}$.

Alors :

1. *Le système (S) est de Cramer si, et seulement si, $D \neq 0$.*
2. *Si $D \neq 0$, alors son unique solution est :* $\left(\dfrac{D_x}{D}, \dfrac{D_y}{D}\right)$.

Corollaire VI.1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Alors : $A^{-1} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \begin{pmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}$

VI.3.c Système de Cramer d'ordre 3

Théorème VI.2. *Soient $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{K}^9$ et $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$. On étudie :*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = x' \\ a_2x + b_2y + c_2z = y' \\ a_3x + b_3y + c_3z = z' \end{cases} \qquad (S)$$

On note : $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $D_x = \begin{vmatrix} x' & b_1 & c_1 \\ y' & b_2 & c_2 \\ z' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & x' & c_1 \\ a_2 & y' & c_2 \\ a_3 & z' & c_3 \end{vmatrix}$ *et* $D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x' \\ a_2 & b_2 & y' \\ a_3 & b_3 & z' \end{vmatrix}$.

Alors :

1. *Le système (S) est de Cramer si, et seulement si, $D \neq 0$.*
2. *Si $D \neq 0$, alors l'unique solution de (S) est* $\left(\dfrac{D_x}{D}, \dfrac{D_y}{D}, \dfrac{D_z}{D}\right)$.