Algèbre-Chapitre 9

Algèbre linéaire - Applications linéaires

La notion de linéarité est évoquée dans de nombreux contextes : système d'équations linéaires, équations différentielles linéaires, suites récurrentes linéaires, linéarité de l'intégrale... Derrière chacun de ces usages du mot "linéaire" se cache en fait une application linéaire. L'objectif de ce chapitre est de définir ces applications et d'en dégager les propriétés élémentaires. En particulier, nous décrirons la notion d'équation linéaire et nous pourrons constater les points communs entre les différentes notions évoquées initialement.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou plus généralement un corps contenant $\mathbb{Q}$ et E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

I Définitions

Définition I.1 (Application linéaire)**.** *Soit $f : E \longrightarrow F$.*
L'application f est ($\mathbb{K}$-)linéaire de E dans F si :

1. $\forall (u,v) \in E^2 \quad f(u+v) = f(u) + f(v)$
2. $\forall u \in E \ \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad f(\alpha.u) = \alpha.f(u)$

Notation : On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F

Remarque I.1. *On parle également de morphisme d'espaces vectoriels ou d'homomorphisme d'espaces vectoriels.*

La première propriété de la définition nous assure qu'une application linéaire est un morphisme de groupe de $(E,+)$ dans $(F,+)$. On a donc la proproposition suivante :

Proposition I.1. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ (i.e. $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire) Alors :*

1. $f(0_E) = 0_F$
2. $\forall u \in E \quad f(u) = -f(u)$

Démonstration. Nous adaptons la démonstration de l'énoncé évoqué précédemment :

1. On a : $f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E)$.
   En soustrayant $f(0_E)$ de chaque bord de cette égalité, on obtient : $\boxed{f(0_E) = 0_F}$
2. Soit $u \in E$.
   On a : $f(-u) = f((-1).u) = (-1).f(u)$. Donc : $\boxed{f(-u) = -f(u)}$

□

Exemple I.1.
1. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & 0_F \end{array} \right.$ *est une application linéaire dite nulle.*
2. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.*
   Soit D : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right.$
   Montrons que D est une application ($\mathbb{R}$-)linéaire.
   (a) *Soit $(f,g) \in \left(\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})\right)^2$.*
   On a : $D(f+g) = (f+g)' = f' + g'$. Donc : $\boxed{D(f+g) = D(f) + D(g)}$

(b) *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$.
On a : $D(\alpha.f) = (\alpha.f)' = \alpha.f'$. *Donc* : $\boxed{D(\alpha.f) = \alpha.D(f)}$

$\boxed{\text{L'application } D \text{ est bien linéaire.}}$

Définition I.2 (Forme linéaire). *Une application linéaire E dans $\mathbb{K}$ est appelée une forme linéaire.*

Exemple I.2. 1. *Soit* $F : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x+3y-2z \end{array} \right.$

Montrons que F est une application linéaire.

(a) *Soient* $u = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{K}^3$ *et* $v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{K}^3$.
On a : $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$.
Donc : $F(u+v) = (x_1+x_2) + 3(y_1+y_2) - 2(z_1+z_2) = (x_1+3y_1-2z_1) + (x_1+3y_2-2z_2)$
D'où : $\boxed{F(u+v) = F(u) + F(v)}$

(b) *Soit* $\alpha \in \mathbb{K}$.
On a : $\alpha.u = (\alpha.x_1, \alpha.y_1, \alpha.z_1)$.
Donc : $F(\alpha.u) = \alpha.x_1 + 3\alpha.y_1 - 2\alpha.z_1 = \alpha.(x_1 + 3y_1 - 2z_1)$
D'où : $\boxed{F(\alpha.u) = \alpha.F(u)}$

L'application F est donc une application linéaire de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathbb{K}$. $\boxed{\text{L'application } F \text{ est une forme linéaire de } \mathbb{K}^3.}$

2. *Soit X un ensemble non vide et $x_0 \in X$.*
Soit $V : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X,\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & f(x_0) \end{array} \right.$
Montons que V est une application ($\mathbb{K}$-)linéaire.

(a) *Soit* $(f,g) \in (\mathcal{F}(X,\mathbb{K}))^2$.
On a : $V(f+g) = (f+g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0)$. *Donc* : $\boxed{V(f+g) = V(f) + V(g)}$

(b) *Soit* $\alpha \in \mathbb{K}$.
On a : $V(\alpha.f) = (\alpha.f)(x_0) = \alpha.f(x_0)$. *Donc* : $\boxed{V(\alpha.f) = \alpha.V(f)}$

L'application V est donc une application linéaire de $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$. $\boxed{V \text{ est une forme linéaire de } \mathcal{F}(X,\mathbb{K}).}$

Définition I.3 (Endomorphisme). *Une application linéaire de E dans E est appelé un endomorphisme de E.*

Notation : On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Exemple I.3. 1. Id_E*, l'application identité de E est un endomorphisme de E.*

2. *L'application nulle de E dans E est un endomorphisme de E.*

3. *Soit* $\alpha \in \mathbb{K}$.
L'application $h_\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & \alpha.u \end{array} \right.$ *est un endomorphisme de E, appelé homothétie de rapport α de E.*
(Le lecteur de ce document est vivement encouragé à rédiger la démonstration de ce fait)

4. *Soit* $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & (X^2+1)P + 3P' \end{array} \right.$.
Montrons que φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
Puisque $\varphi : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$, il suffit de montrer que φ est linéaire.

(a) *Soit* $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]$.
On a : $\varphi(P+Q) = (X^2+1).(P+Q) + 3.(P+Q)' = (X^2+1).P + (X^2+1).Q + 3.P' + 3Q'$
$= \big((X^2+1)P + 3P'\big) + \big((X^2+1)Q + 3Q'\big)$
Donc : $\boxed{\varphi(P+Q) = \varphi(P) + \varphi(Q)}$

(b) *Soit* $\alpha \in \mathbb{K}$.
On a : $\varphi(\alpha.P) = (X^2+1).(\alpha.P) + (\alpha.P)' = (X^2+1).\alpha.P + \alpha.P' = \alpha\big((X^2+1)P + P'\big)$.
Donc : $\boxed{\varphi(\alpha.P) = \alpha.P}$

L'application φ est linéaire. $\boxed{\text{Donc, l'application } \varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{K}[X].}$

Proposition I.2 (Caractérisation pratique d'une application linéaire). *Soit* : $f : E \longrightarrow F$.
L'application f est linéaire si, et seulement si,

$$\forall (u,v) \in E^2 \ \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2 \quad f(\alpha.u + \beta.v) = \alpha.f(u) + \beta.f(v)$$

Remarque I.2. *Ainsi, une application linéaire est une application qui, à une combinaison lénéaire de deux vecteurs, associe la combinaison linéaire des images de ces vecteurs avec les mêmes coefficients.*
Plus généralement, on peut démontrer par récurrence, si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $(u_i)_{i=1}^n \in E^n$ et $(\alpha_i) \in \mathbb{K}^n$, que :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i.u_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha.f(u_i)$$

i.e. L'image par f d'une combinaison linéaire de vecteurs est la combinaison linéaire des images des vecteurs.

Démonstration. $\Longrightarrow$ On suppose que $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Soient $(u,v) \in E^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$.
On a : $f(\alpha.u+\beta.v) = f(\alpha.u) + f(\beta.v)$. Donc : $\boxed{f(\alpha.u+\beta.v) = \alpha.f(u) + \beta.f(v)}$

$\Longleftarrow$ On suppose que f vérifie : $\forall (u,v) \in E^2\ \forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2 \quad f(\alpha.u+\beta.v) = \alpha.f(u)+\beta.f(v)$.
Montrons que f est linéaire.

(a) Soit $(u,v) \in E^2$.
On a : $f(u+v) = f(1.u+1.v) = 1.f(u)+1.f(v)$. Donc : $\boxed{f(u+v) = f(u)+f(v)}$

(b) Soit $\alpha \in \mathbb{K}$.
On a : $f(\alpha.u) = f(\alpha.u+0.u) = \alpha.f(u)+0.f(u) = \alpha.f(u)+0_E$. Donc : $\boxed{f(\alpha.u) = \alpha.f(u)}$

$\boxed{\text{L'application } f \text{ est bien linéaire.}}$

□

Proposition I.3 (Seconde caractérisation pratique d'une application linéaire)**.** *Soit : $f : E \longrightarrow F$.*
L'application f est linéaire si, et seulement si,

$$\forall (u,v) \in E^2\ \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad f(\alpha.u+v) = \alpha.f(u)+f(v)$$

Démonstration. (La preuve est laissée en exercice au lecteur de ce document) □

Exemple I.4. *Soit* $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t \end{array}\right.$.
Montrons que φ est linéaire.
Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(f,g) \in \left(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})\right)$.
On a : $\varphi(\alpha.f+\beta.g) = \displaystyle\int_0^1 (\alpha.f+\beta.g)(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \alpha.f(t)+\beta.g(t)\ \mathrm{d}t = \alpha\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t + \beta\int_0^1 g(t)\ \mathrm{d}t$.
Donc : $\boxed{\varphi(\alpha.f+\beta.g) = \alpha.\varphi(f)+\beta.\varphi(g)}$
$\boxed{\textit{On en déduit que l'application } \varphi \textit{ est linéaire.}}$

Remarque I.3. *Nous vous invitons très fortement à réécrire quelques unes des démonstrations de la linéarité des précédents exemples à l'aide de ces caractérisations.*

II Opérations

II.1 Structure d'espace vectoriel

Définition II.1 (Structure d'espace vectoriel)**.** *L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$.*
En particulier :

1. $\mathcal{L}(E,F) \subset \mathcal{F}(E,F)$
2. *L'application nulle de E dans F est une application linéaire.*
3. *La somme de deux applications linéaires de E dans F est une application linéaire.*
   i.e. $: \forall (f,g) \in (\mathcal{L}(E,F))^2 \quad f+g \in \mathcal{L}(E,F)$
4. $\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall f \in \mathcal{L}(E,F) \quad \lambda.f \in \mathcal{L}(E,F)$

Démonstration. Le premier point est clair. Nous avons déjà vu le second point.

3. Soit $(f,g) \in (\mathcal{L}(E,F))^2$.
   Montrons que $f+g \in \mathcal{L}(E,F)$.
   Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(u,v) \in E^2$.
   On a : $(f+g)(\alpha.u+\beta.v) = f(\alpha.u+\beta.v)+g(\alpha.u+\beta.v) = \alpha.f(u)+\beta.f(v)+\alpha.g(u)+\beta.g(v)$
   $= \alpha.\big(f(u)+g(u)\big)+\beta.\big(f(v)+g(v)\big)$
   Donc : $\boxed{(f+g)(\alpha.u+\beta.v) = \alpha.(f+g)(u)+\beta.(f+g)(v)}$
   $\boxed{\text{L'application } f+g \text{ est une application linéaire.}}$
4. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
   On a : $(\lambda.f)(\alpha.u+\beta.v) = \lambda.f(\alpha.u+\beta.v) = \lambda.(\alpha.f(u)+\beta.f(v)) = \lambda.\alpha.f(u)+\lambda.\beta.f(v)$
   Donc : $\boxed{(\lambda.f)(\alpha.u+\beta.v) = \alpha.(\lambda.f)(u)+\beta.(\lambda.f)(v)}$
   $\boxed{\text{L'application } \lambda.f \text{ est donc une application linéaire.}}$

$\boxed{\text{On en déduit que } \mathcal{L}(E,F) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{F}(E,F).}$ □

Corollaire II.1 (Coombinaison linéaire d'applications linéaires)**.** *Une combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire.*

i.e. : $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall (f_i)_{i=1}^n \in (\mathcal{L}(E,F))^n\ \ \forall (\alpha_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.f_i \in \mathcal{L}(E,F)$

II.2 Composition

Proposition II.1 (Composition d'applications linéaires)**.** *Soient E, F et G trois espaces vectoriels.*
Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires.
Alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Démonstration. Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(u,v) \in E^2$.
On a : $(g \circ f)(\alpha.u+\beta.v) = g\big(f(\alpha.u+\beta.v)\big) = g\big(\alpha.f(u)+\beta.f(v)\big) = \alpha.g(f(u))+\beta.g(f(v))$
Donc : $\boxed{(g \circ f)(\alpha.u+\beta.v) = \alpha.(g \circ f)(u)+\beta.(g \circ f)(v)}$
$\boxed{\text{L'application } g \circ f \text{ est linéaire.}}$ □

Proposition II.2 (Combinaisons linéaires et composition)**.** *Soient f, f_1 et f_2 trois applications linéaires de E dans F.*
Soient g, g_1 et g_2 trois applications linéaires de F dans G.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
Alors :

1. $g \circ (f_1+f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$
2. $g \circ (\lambda.f) = \lambda.(g \circ f)$
3. $(g_1+g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$
4. $(\lambda.g) \circ f = \lambda.(g \circ f)$

Démonstration. Nous prouvons seulement le premier point. Le lecteur de ce document est vivement encouragé à rédiger les autres démonstrations.
Soit $u \in E$.
On a : $\big(g \circ (f_1+f_2)\big)(u) = g\big((f_1+f_2)(u)\big) = g\big(f_1(u)+f_2(u)\big) = g\big(f_1(u)\big)+g\big(f_2(u)\big) = (g \circ f_1)(u)+(g \circ f_2)(v)$
Donc : $\boxed{g \circ (f_1+f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2}$ □

Corollaire II.2. $(\mathcal{L}(E),+,\circ)$ *est un anneau.*

Remarque II.1.
1. *Si $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$, on note :* $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\times}$.
2. *Si E n'est pas engendré par un seul vecteur (i.e. $\dim(E) \geq 2$), alors $\mathcal{L}(E)$ n'est pas commutatif.*

II.3 Linéarité et bijectivité

Proposition II.3 (Linéairité de la réciproque)**.** *Soit $f\ : E \longrightarrow F$ une application linéaire et bijective. Alors, la réciproque f^{-1} de f est une application linéaire de F dans E.*
i.e. $: f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Démonstration. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(u, v) \in F^2$.
On a $: f\big(f^{-1}(\alpha.u + \beta.v)\big) = \alpha.u + \beta.v$
et $: f\big(\alpha.f^{-1}(u) + \beta.f^{-1}(v)\big) = \alpha.f\big(f^{-1}(u)\big) + \beta.f\big(f^{-1}(v)\big) = \alpha.u + \beta.v$
Puisque l'application f est bijective, elle est en particulier injective. D'où : $\boxed{f^{-1}(\alpha.u + \beta.v) = \alpha.f^{-1}(u) + \beta.f^{-1}(v)}$

$\boxed{\text{L'application } f^{-1} \text{ est donc linéaire.}}$ □

Définition II.2 (Isomorphisme - Automorphisme)**.** *1. Soit $f : E \longrightarrow F$. L'application f est un isomorphisme (linéaire) si elle est linéaire et bijective.*

2. Les espaces vectoriels E et F sont isomorphes s'il exite un isomorphisme de E dans F.

3. Soit $f\ : E \longrightarrow E$.
L'application f est un automorphisme (linéaire) si elle est linéaire et bijective.
i.e. si f est un endomorphisme bijectif.

Exemple II.1. *1. L'application Id_E est un automorphisme de E.*
Plus généralement, $\lambda.\mathrm{Id}_E$ est un automorphisme si, et seulement, si

2. Soit $\varphi\ : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(0), P(1), P(2)\big) \end{array}\right.$.
Montrons que l'application φ est un isomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.

(a) Montrons d'abord que l'application φ est linéaire.
Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in \big(\mathbb{R}_2[X]\big)^2$.
On a :

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha.P + \beta.Q) &= \big((\alpha.P + \beta.Q)(0), (\alpha.P + \beta.Q)(1), (\alpha.P + \beta.Q)(2)\big) \\ &= \big(\alpha.P(0) + \beta.Q(0), \alpha.P(1) + \beta.Q(1), \alpha.P(2) + \beta.Q(2)\big) \\ &= \alpha.\big(P(0), P(1), P(2)\big) + \beta.\big(Q(0), Q(1), Q(2)\big) \end{aligned}$$

Ainsi : $\boxed{\varphi(\alpha.P + \beta.Q) = \alpha.\varphi(P) + \beta.\varphi(Q)}$ $\boxed{\textit{L'application } \varphi \textit{ est linéaire.}}$

(b) Montrons, dans un deuxième temps, que φ est bijective.
i.e. $\forall(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3\ \exists! P \in \mathbb{R}_2[X] \quad \varphi(P) = (\alpha, \beta, \gamma)$.
Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ et $P \in \mathbb{R}_2[X]$.
On résout :

$$\varphi(P) = (\alpha, \beta, \gamma) \quad (E)$$

Il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = a_0 + a_1.X + a_2.X^2$.
On a alors $: \varphi(P) = (a_0, a_0 + a_1 + a_2, a_0 + 2a_1 + 4a_2)$.

$$D'où : (E) \iff \begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_0 + a_1 + a_2 = \beta \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = \gamma \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_1 + a_2 = \beta - \alpha \\ 2a_1 + 4a_2 = \gamma - \alpha \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\iff} \begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_1 + a_2 = \beta - \alpha \\ 2a_2 = \alpha - 2\beta + \gamma \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_1 = \beta - \alpha - a_2 = \dfrac{-3\alpha + 4\beta - \gamma}{2} \\ a_2 = \dfrac{\alpha - 2\beta + \gamma}{2} \end{cases}$$

Donc $: (E) \iff P = \alpha - \dfrac{3\alpha - 4\beta + \gamma}{2}X + \dfrac{\alpha - 2\beta + \gamma}{2}X^2$.
L'équation (E) admet donc une unique solution.
$\boxed{\textit{L'application } \varphi \textit{ est donc bijective.}}$

$\boxed{\textit{L'application } \varphi \textit{ est un isomorphisme de } \mathbb{K}_2[X] \textit{ dans } \mathbb{K}^3.}$

Définition II.3 (Groupe linéaire)**.** *L'ensemble des automorphismes de E est un groupe pour la loi $\circ$ noté $\mathrm{GL}(E)$ et appelé groupe linéaire de E.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mathrm{GL}(E)$ est un sous-groupe de l'ensemble des bijections de E. (Les détails de cette démonstration sont laissés en exercice au lecteur de ce document) □

III Noyau et image d'une application linéaire

III.1 Noyau d'une application linéaire

Définition III.1 (Noyau d'une application linéaire)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.*
Le noyau de f noté $\ker(f)$ *est l'ensemble suivant :*

$$\ker(f) = f^{-1}\big(\{0_F\}\big) = \big\{u \in E \ / \ f(u) = 0_F\big\}$$

Remarque III.1. *On a donc :* $\forall u \in E \quad u \in \ker(f) \iff f(u) = 0_F$

Proposition III.1 (Structure de $\ker(f)$)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.*
Alors, $\ker(f)$ *est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration. 1. On a : $f(0_E) = 0_F$. Donc : $0_E \in \ker(f)$. D'où : $\boxed{\ker(f) \neq \emptyset}$

2. Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(u,v) \in \ker(f)$.
   On a : $f(\alpha.u + \beta.v) = \alpha.f(u) + \beta.f(v)$.
   Or : $u \in \ker(f)$ et $v \in \ker(g)$. Donc : $f(u) = f(v) = 0_F$.
   D'où : $f(\alpha.u + \beta.v) = \alpha.0_F + \beta.0_F$. Ainsi : $\boxed{f(\alpha.u + \beta.v) = 0_F}$
   Donc : $\boxed{\alpha.u + \beta.v \in \ker(f)}$

$\boxed{\text{L'ensemble } \ker(f) \text{ est bien un sous-espace vectoriel.}}$ □

Proposition III.2 (Caractérisarion d'une application linéaire injective)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.*
L'application f est injective si, et seulement si, $\ker(f) = \{0_E\}$.

Démonstration. $\Longrightarrow$ On suppose que f est injective.
Montrons que $\ker(f) = \{0_E\}$.
$\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E. Donc : $O_E \in \ker(f)$. Ainsi : $\{0_E\} \subset \ker(f)$.
Soit $u \in \ker(f)$. Montrons que $u = 0_E$.
On a : $f(u) = 0_F = f(0_E)$. Or, l'application f est injective. D'où : $u = 0_E$.
Ainsi, $\ker(f) \subset \{0_E\}$.
On en déduit : $\boxed{\ker(f) = \{0_E\}}$

1. On suppose que $\ker(f) = \{0_E\}$.
   Montrons que f est injective.
   i.e. Montrons que $\forall (u,v) \in E^2 \quad f(u) = f(v) \implies u = v$.
   Soit $(u,v) \in E^2$ tel que : $f(u) = f(v)$.
   On a : $f(u - v) = f(u) - f(v) = 0_F$.
   Donc : $u - v \in \ker(f)$.
   Puisque $\ker(f) = \{0_E\}$, on a donc : $u - v = 0_E$. D'où : $u = v$.
   $\boxed{\text{L'application } f \text{ est donc injective.}}$

□

Exemple III.1. *1. Soit* $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ z-y \end{pmatrix} \end{array}\right.$

Nous laissons le soin au lecteur de ce document de démontrer la linéarité de f.
D'après la définition de $\ker(f)$*, on a :*

$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ \begin{pmatrix} x+y \\ z-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y = 0 \text{ et } z - y = 0 \right\}$$

On a donc : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(f) \iff \begin{cases} x+y=0 \\ z-y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ z = y \end{cases} \iff \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$

$$\iff \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\boxed{\ker(f) = \text{vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

En particulier, on a : $\ker(f) \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

$\boxed{\textit{L'application } f \textit{ n'est donc pas injective.}}$

2. *Soit* f : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \\ x+y+z \end{pmatrix} \end{array} \right.$

Nous laissons à nouveau lecteur de ce document rédiger la démonstration de la linéarité de f.

On a : $\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \\ x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ y+z=0 \text{ et } x+z=0 \text{ et } x+y=0 \text{ et } x+y+z=0 \right\}$$

Donc : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(f) \iff \begin{cases} y+z=0 \\ x+z=0 \\ x+y=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2}(L_1+L_2+L_3)}}{\iff} \begin{cases} y+z=0 \\ x+z=0 \\ x-z=0 \\ 0=0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} z=-y \\ x=-z \\ x=z \end{cases} \iff x=y=z=0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc : $\boxed{\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}$

D'où : $\boxed{f \textit{ est injective.}}$

3. *Soit* φ : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & \begin{pmatrix} P(1) \\ P(2) \end{pmatrix} \end{array} \right.$

Nous laissons à nouveau lecteur de ce document rédiger la démonstration de la linéarité de φ.

On a : $\ker(\varphi) = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ \begin{pmatrix} P(1) \\ P(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ P(1) = 0 \text{ et } P(2) = 0\}$

Donc : $P \in \ker(\varphi) \iff P(1) = P(2) = 0 \iff \exists Q \in \mathbb{R}[X] \quad P = (X-1)(X-2)Q$

Or : $\deg((X-1)(X-2)Q) = 2 + \deg(Q)$.

Donc : $\deg((X-1)(X-2)Q) \leq 2 \iff \deg(Q) \leq 0 \iff Q \in \mathbb{R}$.

D'où : $P \in \ker(\varphi) \iff \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad P = \alpha(X-1)(X-2)$.

On en déduit : $\boxed{\ker(\varphi) = \mathrm{vect}\big((X-1)(X-2)\big)}$

En particulier, $\ker(\varphi) \neq \{0\}$

$\boxed{\textit{L'application } \varphi \textit{ n'est donc pas injective.}}$

III.2 Image d'une application linéaire

Définition III.2 (Image d'une application linéaire)**.** *Soit* $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
L'image de f *notée* $\mathrm{Im}(f)$ *l'ensemble :*

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{v \in F \ / \ \exists u \in E \quad v = f(u)$$

Remarque III.2. *On a donc :* $\forall v \in F \quad v \in \ker(f) \iff \big(\exists u \in E \quad f(u) = v\big)$

Proposition III.3 (Structure de $\mathrm{Im}(f)$)**.** *Soit* $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Alors $\mathrm{Im}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de* F.

Démonstration. 1. Puisque f est à valeurs dans F, on a : $\boxed{\mathrm{Im}(f) = f(E) \subset F}$

2. On a : $f(0_E) = 0_F$. Donc : $0_F \in \mathrm{Im}(f)$. Ainsi : $\boxed{\mathrm{Im}(f) \neq \emptyset}$

3. Soient $(v_1, v_2) \in \big(\mathrm{Im}(f)\big)^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.
   Montrons que $v = \alpha.v_1 + \beta.v_2 \in \mathrm{Im}(f)$.
   On cherche donc $u \in E$ tel que $v = f(u)$.
   On a : $u_1 \in \mathrm{Im}(f)$ et $u_2 \in \mathrm{Im}(f)$.
   Il existe donc $u_1 \in E$ et $u_2 \in E$ tel que : $v_1 = f(u_1)$ et $v_2 = f(u_2)$.
   Ainsi : $v = \alpha.v_1 + \beta.v_2 = \alpha.f(u_1) + \beta.f(u_2) = f\big(\alpha.u_1 + \beta.u_2\big)$
   On pose donc : $u = \alpha.u_1 + \beta.u_2$ et on obtient : $v = f(u)$.
   D'où : $\boxed{v = \alpha.v_1 + \beta.v_2 \in \mathrm{Im}(f)}$

   $\boxed{\text{On en déduit que } \mathrm{Im}(f) \text{ est un sous-espace vectoriel de } F.}$ □

Proposition III.4 (Caractérisarion d'une application linéaire surjective)**.** *Soit* $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
L'application f *est surjective si, et seulement si* $\mathrm{Im}(f) = F$.

Démonstration. $\boxed{\text{L'application } f \text{ est surjective} \iff f(E) = F \iff \mathrm{Im}(f) = F}$ □

Exemple III.2. *Nous reprenons l'application :* $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \\ x+y+z \end{pmatrix} \end{array}\right.$

Déterminons $\mathrm{Im}(f)$.

On a : $\mathrm{Im}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;/\; \exists \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \right\}$

Nous proposons deux méthodes différentes :

1. *On a donc :*
$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(f) \iff \exists \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$
$$\iff \exists \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \\ x+y+z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$
   Ainsi : $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$

2. *On considère l'équation d'inconnue* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *suivante :* $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ (E).

   Le vecteur $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ *est un élément de* $\mathrm{Im}(f)$ *si, et seulement si, l'équation* (E) *admet au moins une solution.*

   On a :
$$(E) \iff \begin{cases} y+z = \alpha \\ x+z = \beta \\ x+y = \gamma \\ x+y+z = \delta \end{cases} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_4 - L_1 \\ L_2 \leftarrow L_4 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_4 - L_3}}{\iff} \begin{cases} x = \alpha - \delta \\ y = \beta - \delta \\ z = \gamma - \delta \\ x+y+z = \delta \end{cases} \iff \begin{cases} x = \alpha - \delta \\ y = \beta - \delta \\ z = \gamma - \delta \\ \alpha + \beta + \gamma - 2\delta = 0 \end{cases}$$
   L'équation (E) *admet donc une solution si, et seulement si* $\alpha + \beta + \gamma - 2\delta = 0$.

   $\boxed{\textit{Ainsi, } \mathrm{Im}(f) \textit{ est le sous-ensemble de } \mathbb{R}^4 \textit{ d'équation } \alpha + \beta + \gamma - 2\delta = 0.}$

Ainsi, $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^4$.

$\boxed{\textit{L'application } f \textit{ n'est donc pas surjective.}}$

III.3 Équations linéaires

Définition III.3 (Équation linéaire)**.** *Une équation linéaire est une équation d'inconnue $x \in E$ de la forme :*

$$f(x) = b \quad (\mathcal{E})$$

où :

1. *$f \in \mathcal{L}(E, F)$.*
2. *$b \in F$ est fixé et est appelé second membre de l'équation.*

Proposition III.5 (Structure des solutions d'une équation linéaire)**.** *Les solutions de l'équation linéaire $(\mathcal{E})$ est :*

1. *soit vide.*
2. *soit un sous-espace affine de E dont la direction est $\ker(f)$.*
   i.e. si $x_0 \in E$ est une solution "particulière" $(\mathcal{E})$, alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est : $x_0 + \ker(f)$.

Démonstration. On suppose que x_0 est une solution "particulière" de $(\mathcal{E})$.
On note S, l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.
Montrons que : $S = x_0 + \ker(f)$.

- $\subset$ Soit $x \in S$.
  On a : $x = x_0 + (x - x_0)$.
  Or : $f(x - x_0) = f(x) - f(x_0) = b - b = 0$. D'où : $x - x_0 \in \ker(f)$.
  Ainsi : $x \in x_0 + \ker(f)$ et donc : $\boxed{S \subset x_0 + \ker(f)}$
- $\supset$ Soit $x \in x_0 + \ker(f)$.
  Il existe $u \in \ker(f)$ tel que : $x = x_0 + u$.
  On a donc : $f(x) = f(x_0 + u) = f(x_0) + f(u) = b + 0_F = b$.
  x est donc une solution de $(\mathcal{E})$. D'où : $\boxed{x_0 + \ker(f) \subset S}$

Ainsi : $\boxed{S = x_0 + \ker(f)}$ □

Remarque III.3 (Méthode de résolution d'une équation linéaire)**.** *Par la proposition précédente, la résolution d'une équation linéaire $(\mathcal{E})$ se fait en deux étapes :*

1. *On trouve une solution particulière x_0 de $(\mathcal{E})$.*
2. *On détermine $\ker(f)$.*
   i.e. On détermine l'ensemble des solutions de l'équation "homogène" :

$$f(x) = 0_F \quad (\mathcal{E}_0)$$

L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est alors : $x_0 + \ker(f)$.

Proposition III.6 (Principe de superposition)**.** *Soient $(b_1, b_2) \in F^2$ et (α, β) tel que : $b = \alpha.b_1 + \beta.b_2$.*
Soient $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que : $f(x_1) = b_1$ et $f(x_2) = b_2$.
Alors : $x_0 = \alpha.x_1 + \beta.x_2$ est une solution de $(\mathcal{E})$.

Démonstration. On a :
$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(\alpha.x_1 + \beta.x_2) \\ &= \alpha.f(x_1) + \beta.f(x_2) \\ &= \alpha.b_1 + \beta.b_2 = b \end{aligned}$$

$\boxed{x_0 = \alpha.x_1 + \beta.x_2 \text{ est bien une solution de } (\mathcal{E}).}$ □

Remarque III.4. *On a un résultat similaire lorsque b s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire.*

Exemple III.3. *Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.*
Résolvons le système d'équation linéaire :

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ y + z = b \\ z = c \end{cases} \quad (S)$$

L'application linéaire associée à cette équation est : $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y+z \\ y+z \\ z \end{pmatrix} \end{array} \right.$

D'autre part, le second membre de l'équation est : $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

En effet, on a bien : $(S) \iff f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Or : $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour résoudre (S), on résout trois systèmes plus simple :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ y+z=0 \\ z=0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z=1 \\ z=0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z=0 \\ z=1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Par le principe de superposition, on a : $(S) \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{L'unique solution de } (S) \text{ est donc : } \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c \end{pmatrix}.}$

IV Applications linéaires particulières

IV.1 Applications linéaires définies sur $\mathbb{K}^n$

On fixe : $n \in \mathbb{N}$.

Notation : Dans cette sous-partie, on note $e_i \in \mathbb{K}^n$ le vecteur : $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\text{i}^{\text{ème}}$ ligne

Proposition IV.1 (Caractérisation d'une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans E)**.** *Soit :* $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow E$.
Alors, l'application f est une application linéaire si, et seulement si il existe une unique famille de vecteurs $(u_i)_{i=1}^n \in E^n$ tels que :

$$\forall (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n \quad f\big((x_i)_{i=1}^n\big) = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i u_i$$

Démonstration. 1. On suppose que f est une application linéaire.

Existence : On a : $(x_i)_{i=1}^n = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$

D'où : $f\big((x_i)_{i=1}^n\big) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i).$

On pose $u_i = f(e_i)$.

D'où : $\boxed{f\big((x_i)_{i=1}^n\big) = \sum_{i=1}^n x_i u_i}$

Unicité : Soit $(u_i)_{i=1}^n \in E^n$ tel que : $\forall (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n \quad f\big((x_i)_{i=1}^n\big) = \sum_{i=1}^n x_i u_i.$

On a alors : $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad f(e_i) = u_i.$

$\boxed{\text{On en déduit que la famille } (u_i)_{i=1}^n \text{ est unique.}}$

2. Soit $(u_i)_{i=1}^n \in E^n$ tel que : $\forall (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n \quad f\big((x_i)_{i=1}^n\big) = \sum_{i=1}^n x_i u_i.$

Montrons que f est une application linéaire.
Soient $(x_i)_{i=1}^n$, $(y_i)_{i=1}^n$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.
On a : $\alpha.(x_i)_{i=1}^n + \beta(y_i)_{i=1}^n = (\alpha.x_i + \beta.y_i)$.

$$\begin{aligned} \text{Donc : } f\big(\alpha.(x_i)_{i=1}^n + \beta.(y_i)_{i=1}^n\big) &= \sum_{i=1}^n (\alpha.x_i + \beta.y_i).u_i \\ &= \alpha.\sum_{i=1}^n x_i.u_i + \beta \sum_{i=1}^n y_i.u_i \\ &= \alpha.f\big((u_i)_{i=1}^n\big) + \beta.f\big((y_i)_{i=1}^n\big) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'application } f \text{ est donc linéaire.}}$

□

Corollaire IV.1 (Caractérisation d'une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$)**.** *Soit $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$. Alors, l'application f est linéaire si, et seulement si, il exste $(\alpha_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}$ tel que :*

$$\forall (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n \quad f\big((x_i)_{i=1}^n\big) = \sum_{i=1}^n \alpha_i.x_i$$

Exemple IV.1. *1. Une application linéaire de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathbb{K}$ est de la forme :*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \alpha.x + \beta.y + \gamma.z \end{array} \right. \qquad \text{où}(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3$$

2. Une application linéaire de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathbb{K}^2$ est de la forme :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \alpha_1.x + \beta_1.y + \gamma_1.z \\ \alpha_2.x + \beta_2.y + \gamma_2.z \end{pmatrix} \end{array} \right. \qquad \text{où } (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \in \mathbb{K}^6$$

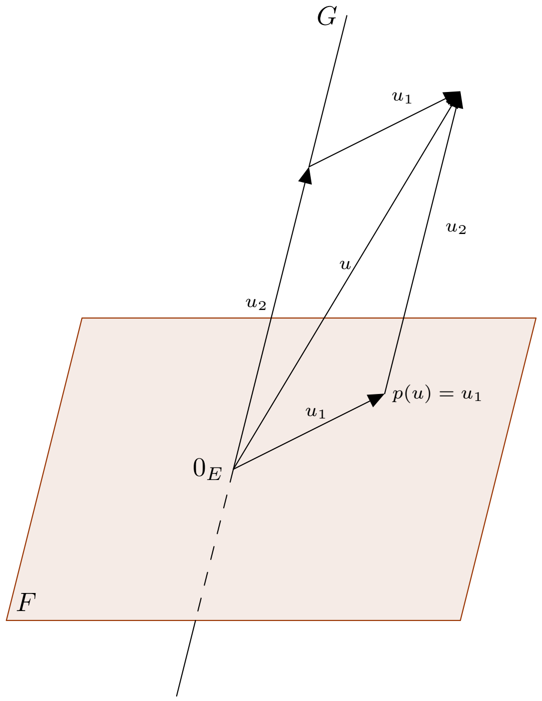
Remarquons que f est caractérisé par la donnée du tableau de nombre : $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix}$ appelé la matrice de f de la base canonique de $\mathbb{K}^3$ vers la base canonique de $\mathbb{K}^2$. Nous détaillerons tout cela dans un prochain chapitre.

IV.2 Projections - Projecteurs

Définition IV.1 (Projection)**.** *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. (i.e. $E = F \oplus G$). La projection sur F parallèlement à G est l'application :*

$$p : \left\{ \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & u_1 \text{ si } u = u_1 + u_2 \textit{ avec } u_1 \in F \text{ et } u_2 \in G \end{array} \right.$$

Remarque IV.1. *Puisque $E = F \oplus G$, pour tout $u \in E$, il existe un unique couple $(u_1, u_2) \in F \times G$ tel que $u = u_1 + u_2$.*
Ainsi, l'application p est bien définie.



Proposition IV.2 (Propriété de p)**.** *L'application p est une application linéaire telle que :*

1. $\ker(p) = G$
2. $\mathrm{Im}(p) = F$
3. $p_{|F} = \mathrm{Id}_F$ *et* $p_{|G} = 0$
4. $p \circ p = p$

Démonstration. 0. Montrons que l'application p est linéaire.
Soient $(u, v) \in E^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.
Il existe $(u_1, u_2) \in F \times G$ et $(v_1, v_2) \in F \times G$ tel que $u = u_1 + u_2$ et $v = v_1 + v_2$.
On a alors : $p(u) = u_1$ et : $p(v) = v_1$.
D'autre part : $\alpha.u + \beta.v = \alpha.(u_1 + u_2) + \beta.(v_1 + v_2)$
$= (\alpha.u_1 + \beta.v_1) + (\alpha.u_2 + \beta.v_2)$
Or : $\alpha.u_1 + \beta.v_1 \in F$ et $\alpha.u_2 + \beta.v_2 \in G$.
D'où : $p(\alpha.u + \beta.v) = \alpha.u_1 + \beta.v_1$. Ainsi : $\boxed{p(\alpha.u + \beta.v) = \alpha.p(u) + \beta.p(v)}$
$\boxed{\text{L'application } p \text{ est donc linéaire.}}$

1. Montrons que $\ker(p) = G$.
Soit $u \in \ker(p)$.
Il existe $(u_1, u_2) \in F \times G$ tel que : $u = u_1 + u_2$.
On a alors : $p(u) = u_1 = 0_E$.
Donc : $u = u_2 \in G$.
D'où : $\underline{\ker(p) \subset G}$

Soit $u \in G$.
On a : $u = 0_E + u$.
Or : $0_E \in F$ et $u \in G$.
Donc : $p(u) = 0_E$.
D'où : $u \in \ker(p)$.
Ainsi $\underline{G \subset \ker(p)}$
On en déduit : $\boxed{\ker(p) = G}$
On a démontré également $\forall u \in G \quad p(u) = 0_E$ et donc : $\boxed{p_{|G} = 0}$

2. Montrons que $\mathrm{Im}(p) = F$.
   Soit $v \in \mathrm{Im}(p)$. Il existe $u \in E$ tel que : $v = p(u)$.
   Il existe $(u_1, u_2) \in F \times G$ tel que : $u = u_1 + u_2$.
   On a alors : $v = p(u) = u_1 \in F$.
   D'où : $\underline{\mathrm{Im}(p) \subset F}$

   Soit $v \in F$.
   On a : $v = v + 0_E$, $v \in F$ et $0_E \in G$.
   Donc : $v = p(v) \in \mathrm{Im}(p)$.
   D'où : $\underline{F \subset \ker(p)}$ On en déduit : $\boxed{\mathrm{Im}(p) = F}$ On a démontré également $\forall v \in F \quad p(v) = v$ et donc : $\boxed{p_{|F} = \mathrm{Id}_F}$
3. Montrons que $p \circ p = p$.
   Soit $u \in E$.
   On a : $\mathrm{Im}(p) = F$.
   Donc : $p(u) \in F$.
   Or $p_{|F} = \mathrm{Id}_F$.
   Donc : $p(p(u)) = p(u)$.
   On en déduit que : $\boxed{p \circ p = p}$

□

Proposition IV.3. *Soit q la projection sur Q parallèment à F. Alors :*

1. $q = \mathrm{Id}_E - p$
2. $p = \mathrm{Id}_E - q$
3. $F = \mathrm{Im}(p) = \ker(q) = \ker(\mathrm{Id}_E - p)$
4. $G = \ker(p) = \mathrm{Im}(q) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - p)$

Démonstration. Soit $u \in E$.
Il existe $(u_1, u_2) \in F \times G$ tel que : $u = u_1 + u_2$.
On a alors : $p(u) = u_1$ et $q(u) = u_2$. Donc : $p(u) + q(u) = u$. D'où : $q(u) = u - p(u)$.
Ainsi : $\boxed{q = \mathrm{Id}_E - p}$ □

Exemple IV.2. *Soient F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y + z = 0$ et $G = \mathrm{vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.*

Déterminons la projection sur F parallèlement à G.

1. *Montrons que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.*

   (a) *Montrons que $F \cap G = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.*

   Soit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in F \cap G$.

   Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\-\alpha\\\alpha\end{pmatrix}$.
   D'après l'équation de F, on a : $\alpha - \alpha + \alpha = \alpha = 0$.
   D'où : $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

   On en déduit que : $\underline{F \cap G = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}}$

   (b) *Soit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.*

   On cherche $u_1 \in F$ et $u_2 \in G$ tel que : $u_1 + u_2 = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \quad (E)$.

On a : $(E) \iff u_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - u_2$.

On cherche d'abord $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in F$.

Or : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-\alpha \\ y+\alpha \\ z-\alpha \end{pmatrix}$.

Donc : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in F \iff (x-\alpha)+(y+\alpha)+(z-\alpha) = 0$

$\iff x+y+z-\alpha = 0 \iff \alpha = x+y+z$

On pose donc : $u_2 = (x+y+z)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $u_1 = u - u_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - (x+y+z)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-z \\ x+2y+z \\ -x-y \end{pmatrix}$.

Or : $(-y-z)+(x+2y+z)+(-x-y) = 0$.

On a donc : $u_1 \in F$, $u_2 \in G$ *et* $u = u_1 + u_2$.

Ainsi : $\underline{E = F + G}$

On en déduit que : $\boxed{E = F \oplus G}$

2. *On a* : $p\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = u_1$.

D'où : $\boxed{p\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-z \\ x+2y+z \\ -x-y \end{pmatrix}}$

Nous voulons caractériser de manière pratique les projections. Pour cela, nous introduisons la notion de projecteur qui sont les applications qui vérifient la propriété 4 de la proposition précédente :

Définition IV.2 (Projecteur)**.** *Soit* $p \in \mathcal{L}(E)$*. L'application* p *est un projecteur de* E *si*

$$p \circ p = p$$

Proposition IV.4 (Caractérisation des projections)**.** *Soit* p *un projecteur de* E*.*
Alors, l'application p *est la projection sur* $\mathrm{Im}(p)$ *parallèlement à* $\ker(p)$*.*

Démonstration. 1. Montrons d'abord que $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p)$.

(a) Montrons que $\mathrm{Im}(p) \cap \ker(p) = \{0_E\}$.
Soit $u \in \mathrm{Im}(p) \cap \ker(p)$.
On a donc : $p(u) = 0_E$
et il existe $v \in E$ tel que : $u = p(v)$.
Puisque $p = p \circ p$, on ontient : $u = p(v) = p(p(v)) = p(u) = 0_E$. On en déduit que : $\underline{\mathrm{Im}(p) \cap \ker(p) = \{0_E\}}$

(b) Montrons que $\mathrm{Im}(p) + \ker(p) = E$.
Soit $u \in E$.
On cherche $u_1 \in \mathrm{Im}(p)$ et $u_2 \in \ker(p)$ tel que : $u = u_1 + u_2$.
Remarque IV.2. *Si* p *est un projection, alors* : $u_1 = p(u)$ *et donc* : $u_2 = u - p(u)$.
On a : $u = p(u) + (u - p(u))$.
Or : $p(u) \in \mathrm{Im}(p)$
et : $p\big(u - p(u)\big) = p(u) - p\big(p(u)\big) = p(u) - p(u) = 0_E$.
Donc : $u - p(u) \in \ker(f)$.
Donc : $u_1 = p(u)$ et $u_2 = u - p(u)$ conviennent.
On en déduit que : $\underline{\mathrm{Im}(p) + \ker(p) = E}$

On en déduit que : $\boxed{\mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p) = E}$

2. Soit $\tilde{p}$ la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement $\ker(p)$.
On a : $\tilde{p}(u) = u_1 = p(u)$.
Donc : $\tilde{p} = p$. $\boxed{\text{L'application } p \text{ est donc la projection sur } \mathrm{Im}(p) \text{ parallèlement à } \ker(p).}$

□

Exemple IV.3. *Soit* $p : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} y+z \\ 4x+3y-z \\ -4x+y+5z \end{pmatrix} \end{array} \right.$

1. *Montrons que p est un projection.*

   Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

   $$\text{On a : } p\left(p\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = p\begin{pmatrix} \frac{y+z}{4} \\ \frac{4x+3y-z}{4} \\ \frac{-4x+y+5z}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \frac{4x+3y-z}{4} + \frac{-4x+y+5z}{4} \\ (y+z) + 3\frac{4x+3y-z}{4} - \frac{-4x+y+5z}{4} \\ -(y+z) + \frac{4x+3y-z}{4} + 5\frac{-4x+y+5z}{4} \end{pmatrix}$$
   $$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} y+z \\ 4x+3y-z \\ -4x+y+5z \end{pmatrix}$$

   $$\text{Donc : } p\left(p\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = p\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

   D'où $p \circ p = p$.
   L'application p est donc un projecteur.

   $\boxed{\text{\textit{L'application p est donc la projection sur} } \mathrm{Im}(p) \text{ \textit{parallèlement à} } \ker(p).}$

2. *Précisons les caractéristiques de p.*

   (a) *On a :*
   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(p) \iff p\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   $$\iff \begin{cases} y+z=0 \\ 4x+3y-z=0 \\ -4x+y+5z=0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3+L_2}{\iff} \begin{cases} y+z=0 \\ 4x+3y-z=0 \\ 4y+4z=0 \end{cases}$$
   $$\iff \begin{cases} y+z=0 \\ 4x+3y-z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-z \\ 4x-4z=0 \end{cases}$$
   $$\iff \begin{cases} y=-z \\ x=z \end{cases} \iff \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Donc : $\boxed{\ker(p) = \mathrm{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

   (b) *On a :* $\mathrm{Im}(p) = \ker(\mathrm{Id} - p)$.

   $$\text{On a : } (\mathrm{Id}-p)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} y+z \\ 4x+3y-z \\ -4x+y+5z \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4x-y-z \\ -4x+y+z \\ 4x-y-z \end{pmatrix} = \frac{4x-y-z}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   $$\text{Donc : } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(p) \iff 4x-y-z=0 \iff z = 4x-y$$
   $$\iff \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 4\alpha-\beta \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

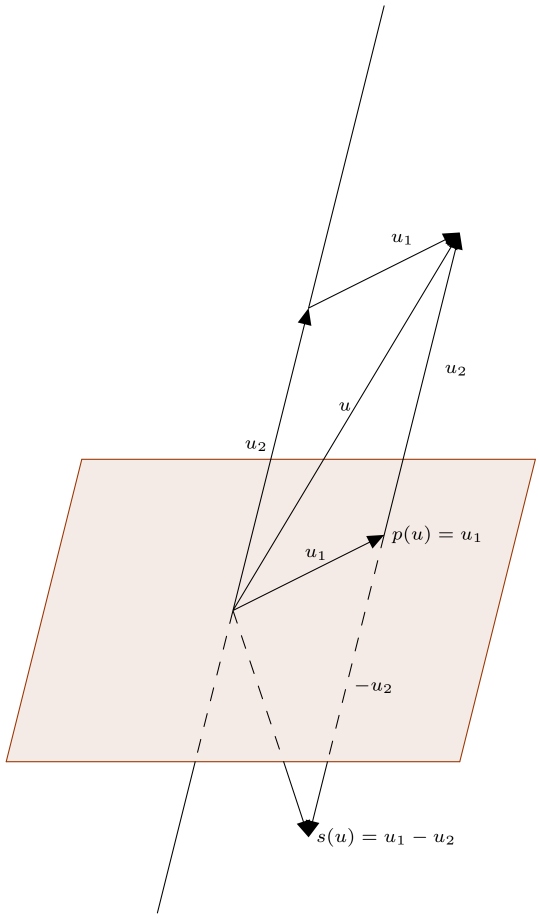
   D'où : $\boxed{\mathrm{Im}(p) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$

$\boxed{\text{\textit{L'application p est donc la projection sur} } \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \text{ \textit{parallèlement à} } \mathrm{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.}$

IV.3 Symétrie

Définition IV.3 (Symétrie linéaire)**.** *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. (i.e. $E = F \oplus G$)*
La symétrie (linéaire) d'axe F et de direction G est l'application :

$$s : \left\{ \begin{array}{ccll} E & \longrightarrow & E & \\ u & \longmapsto & u_1 - u_2 & \textit{si } u = u_1 + u_2 \textit{ avec } u_1 \in F \text{ et } u_2 \in G \end{array} \right.$$



Proposition IV.5 (Lien entre symétrie et projection)**.** *Soit p la projection sur F parallèlement à G.*
Alors :

1. $s = 2p - \mathrm{Id}_E$
2. $p = \dfrac{1}{2}(\mathrm{Id}_E + s)$

Démonstration. Soit $u \in E$.
Il existe $u_1 \in F$ et $u_2 \in G$ tel que $u = u_1 + u_2$. On a : $u_1 = p(u)$ et $u_2 = u - p(u)$.
Donc : $s(u) = u_1 - u_2 = p(u) - \big(u - p(u)\big) = 2p(u) - u$.

D'où : $\boxed{s = 2p - \mathrm{Id}_E}$ et donc : $\boxed{p = \dfrac{1}{2}(\mathrm{Id}_E + s)}$ □

Proposition IV.6 (Propriété de s)**.** *L'application s est une application linéaire tel que :*

1. $F = \ker(\mathrm{Id}_E - s)$
2. $G = \ker(\mathrm{Id}_E + s)$
3. $s_{|F} = \mathrm{Id}_F$ *et* $s_{|G} = \mathrm{Id}_G$
4. $s \circ s = \mathrm{Id}_E$

Démonstration.
1. L'application s est une combinaison linéaire des applications linéaires de p et de Id_E.
   D'où : $\boxed{s \in \mathcal{L}(E)}$
2. On a : $F = \ker(\mathrm{Id}_E - p)$.
   Soit $u \in E$.

On a : $u \in F \iff u \in \ker(\mathrm{Id}_E - p) \iff u - p(u) = 0_E \iff u - \dfrac{1}{2}(\mathrm{Id}_E + s)(u) = 0_E$

$\iff 2u - \big(u + s(u)\big) = 0_E \iff u - s(u) = 0_E \iff (\mathrm{Id}_E - s)(u) = 0_E$

$\iff u \in \ker(\mathrm{Id}_E - s)$

D'où : $\boxed{F = \ker(\mathrm{Id}_E - s)}$

3. On a : $G = \ker(p)$.
   Soit $u \in E$.
   On a : $u \in G \iff u \in \ker(p) \iff p(u) = 0_E \iff \dfrac{1}{2}(\mathrm{Id}_E + s)(u) = 0_E$

   $\iff u + s(u) = 0_E \iff (\mathrm{Id}_E + s)(u) = 0_E \iff u \in \ker(\mathrm{Id}_E + s)$

   D'où : $\boxed{G = \ker(\mathrm{Id}_E + s)}$

4. Soit $u \in F$.
   On a : $u \in \ker(\mathrm{Id}_E - s)$.
   Donc : $(\mathrm{Id}_E - s)(u) = u - s(u) = 0_E$.
   D'où : $s(u) = u$. Ainsi : $\boxed{s_{|F} = \mathrm{Id}_F}$

5. Soit $u \in G$.
   On a : $u \in \ker(\mathrm{Id}_E + s)$.
   Donc : $(\mathrm{Id}_E + s)(u) = u + s(u) = 0_E$.
   D'où : $s(u) = -u$. Ainsi : $\boxed{s_{|G} = -\mathrm{Id}_G}$

6. On a : $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.
   D'autre part : $p \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ p = p$.
   p et Id_E commutent entre eux.
   Donc : $s \circ s = (2p - \mathrm{Id}_E) \circ (2p - \mathrm{Id}_E) = 2p \circ 2p - 2.2p \circ \mathrm{Id}_E + \mathrm{Id}_E \circ \mathrm{Id}_E = 4p \circ p - 4p + \mathrm{Id}_E$.
   Puisque p est une projection, on a : $p \circ p = p$.
   D'où : $s \circ s = 4p - 4p + \mathrm{Id}_E$ et donc : $\boxed{s \circ s = \mathrm{Id}_E}$

□

Exemple IV.4. *Soient* $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$ *et* $G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}\right)$.
Déterminons la symétrie d'axe F et de direction G.

1. *Montrons d'abord que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.*
   Soit $u = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.
   On résout l'équation d'inconnue $u_1 \in F$ et $u_2 \in G$:

$$u_1 + u_2 = u \quad (E)$$

   Il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que :

$$u_1 = \alpha \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha + 2\beta\\-2\alpha - \beta\\\alpha + \beta\end{pmatrix} \text{ et } u_2 = \gamma \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma\\3\gamma\\-\gamma\end{pmatrix}$$

   Donc : $u_1 + u_2 = \begin{pmatrix}\alpha + 2\beta\\-2\alpha - \beta\\\alpha + \beta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\gamma\\3\gamma\\-\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha + 2\beta + \gamma\\-2\alpha - \beta + 3\gamma\\\alpha + \beta - \gamma\end{pmatrix}$

D'où : $(E) \iff \begin{cases} \alpha+2\beta+\gamma=x \\ -2\alpha-\beta+3\gamma=y \\ \alpha+\beta-\gamma=z \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+2L_1 \\ L_3\leftarrow L_1-L_3}}{\iff} \begin{cases} \alpha+2\beta+\gamma=x \\ 3\beta+5\gamma=2x+y \\ \beta+2\gamma=x-z \end{cases}$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_3 \\ L_3\leftarrow 3L_3-L_2}}{\iff} \begin{cases} \alpha+2\beta+\gamma=x \\ \beta+2\gamma=x-z \\ \gamma=x-y-3z \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha=x-2\beta-\gamma=2x-3y-7z \\ \beta=x-z-2\gamma=-x+2y+5z \\ \gamma=x-y-3z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} u_1=(2x-3y-7z)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+(-x+2y+5z)\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+3z\\-3x+4y+9z\\x-y-2z\end{pmatrix} \\ u_2=(x-y-3z)\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y-3z\\3x-3y-9z\\-x+y+3z\end{pmatrix} \end{cases}$$

On en déduit que : $\boxed{\mathbb{R}^3=F\oplus G}$

2. *On a :* $s(u)=u_1-u_2=\begin{pmatrix}y+3z\\-3x+4y+9z\\x-y-2z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x-y-3z\\3x-3y-9z\\-x+y+3z\end{pmatrix}$.

   Donc : $\boxed{s\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x+2y+6z\\-6x+7y+18z\\2x-2y-5z\end{pmatrix}}$

Nous voulons caractériser de manière pratique les symétries. Pour cela, nous introduisons la notion d'involution qui sont les applications qui vérifient la propriété 4 de la proposition précédente :

Définition IV.4 (Involution)**.** *Soit $s\in\mathcal{L}(E)$. L'application s est une involution si*

$$s\circ s=\mathrm{Id}_E$$

Proposition IV.7 (Caractérisation des symétries)**.** *Soit $s\in\mathcal{L}(E)$ une involution.*
Alors, s est la symétrie d'axe $\ker(\mathrm{Id}_E-s)$ *et de direction* $\ker(\mathrm{Id}_E+s)$.

Démonstration. On pose $p=\frac{1}{2}(\mathrm{Id}_E+s)$.

On a : $p\circ p=\left(\frac{1}{2}(\mathrm{Id}_E+s)\right)\circ\left(\frac{1}{2}(\mathrm{Id}_E+s)\right)=\frac{1}{4}\big(\mathrm{Id}_E^2+2\mathrm{Id}_E\circ s+s^2\big)=\frac{1}{4}\big(\mathrm{Id}_E+2s+\mathrm{Id}_E\big)$

$=\frac{1}{2}\big(\mathrm{Id}_E+s\big)=p$

L'application p est donc la projection sur $F=\ker(\mathrm{Id}_E-p)$ parallèlement à $G=\ker(p)$.
Or : $s=2p-\mathrm{Id}_E$.
L'application s est donc la symétrie sur F parallèlement à G.
$\boxed{\text{Par la proposition précédente, } s \text{ est la symétrie d'axe } \ker(\mathrm{Id}_E-s) \text{ et de direction } \ker(\mathrm{Id}_E+s).}$ □

Exemple IV.5. *Soit* s : $\begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix}-3x-2y+4z\\2x+y-4z\\-x-y+z\end{pmatrix} \end{cases}$

Montrons que s est un symétrie et précisons ses caractéristiques.

1. $\boxed{\textit{L'application } s \textit{ est linéaire.}}$
2. *Montrons que* $s\circ s=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

   Soit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$.

   On a : $(s\circ s)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-3x-2y+4z\\2x+y-4z\\-x-y+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3(-3x-2y+4z)-2(2x+y-4z)+4(-x-y+z)\\2(-3x-2y+4z)+(2x+y-4z)-4(-x-y+z)\\-(-3x-2y+4z)-(2x+y-4z)+(-x-y+z)\end{pmatrix}$

   $=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

   $\boxed{\textit{L'application } s \textit{ est une symétrie.}}$

3. *L'axe de s est* $\ker(s - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

   Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

   On a : $u \in \ker(s - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \iff \begin{pmatrix} -3x - 2y + 4z \\ 2x + y - 4z \\ -x - y + z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -4x - 2y + 4z \\ 2x - 4z \\ -x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   $$\iff \begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ x - 2z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - x - 2.\dfrac{x}{2} = 0y = -x \\ z = \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

   $$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ \dfrac{x}{2} \end{pmatrix} = \frac{x}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   $$\boxed{\textit{L'axe de la symétrie } s \textit{ est } \ker(s - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

4. *La direction de s est* $\ker(s + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

   Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

   On a : $u \in \ker(s + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \iff \begin{pmatrix} -3x - 2y + 4z \\ 2x + y - 4z \\ -x - y + z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -2x - 2y + 4z \\ 2x + 2y - 4z \\ -x - y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   $$\iff -x - y + 2z = 0 \iff x = y - 2z$$

   $$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   $$\boxed{\textit{La direction de la symétrie } s \textit{ est } \ker(s + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).}$$

$$\boxed{\textit{L'application } s \textit{ est la symétrie d'axe } \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \textit{ et de direction } \mathrm{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).}$$

IV.4 Affinités

La notion d'affinité généralise les notions de projection et de symétrie.

Définition IV.5 (Affinité). *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. (i.e. $E = F \oplus G$) Soit $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$ L'affinité de rapport α par rapport à F parallèlement à G est l'application :*

$$f : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & u_1 - \alpha u_2 \quad \textit{si } u = u_1 + u_2 \textit{ avec } u_1 \in F \text{ et } u_2 \in G \end{cases}$$

Remarque IV.3.
1. *Si $\alpha = 0$, alors f est une projection.*
2. *Si $\alpha = 1$, alors f est une symétrie.*

Proposition IV.8 (Propriété de f). *L'application f est une application linéaire tel que :*

1. $F = \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ *et* $G = \ker(f - \alpha\mathrm{Id}_E)$
2. *Si $\alpha \neq 0$, alors l'application f est bijective et sa réciproque est l'affinité de rapport α^{-1} par rapport à F parallèlement à G.*