Analyse-Chapitre 7

Fonctions d'une variable réelle

I Généralités

I.1 Définition

Définition I.1. *Une fonction f d'une variable réelle est une application définie sur un sous-ensemble $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.*
L'ensemble de départ $\mathcal{D}_f$ est appelé ensemble (ou domaine) de définition de f.

Remarque I.1. *Une fonction est souvent définie par une expression sans préciser son ensemble de définition.*

Exemple I.1. *Soit f la fonction définie par l'expression : $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\ln|x|}$.*
La fonction f est définie en $x \in \mathbb{R}$ si, et seulement si : $\begin{cases} \sqrt{1-x^2} \text{ est bien défini} \\ \ln|x| \text{ est bien défini et non nul} \end{cases}$
Or : $\sqrt{1-x^2}$ *est bien défini* $\iff 1-x^2 \geq 0 \iff x \in [-1,1]$
et : $\ln|x|$ *est bien défini et non nul* $\iff |x| > 0 \text{ et } |x| \neq 1 \iff x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1,-1\}$.
La fonction f est donc définie sur $\mathcal{D}_f = [-1,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \{0,1,-1\}) =]-1,0[\cup]0,1[$.

I.2 Opérations

Définition I.2 (Opérations)**.** *Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble de définition D. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit les fonctions suivantes :*

1. *$f+g$ par : $\forall x \in D \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$.*
2. *fg par : $\forall x \in D \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$.*
3. *λf par : $\forall x \in D \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.*
4. *Si $\forall x \in D \quad f(x) \neq 0$, on définit $\dfrac{1}{f}$ par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.*
5. *$|f|$ par : $\forall x \in D \quad |f|(x) = |f(x)|$*

Remarque I.2. *On rappelle que l'ensemble des applications de D dans $\mathbb{R}$ est notée $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$. On a les faits suivants :*

1. *Les points 1 et 2 définissent une addition et une multiplication sur $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$ qui en font un anneau commutatif. De plus, par le point 4, les éléments inversibles de cet anneau sont les fonctions qui ne s'annulent pas sur D.*
2. *Les points 1 et 3 définissent une addition et une loi de composition externe sur $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$ qui en font un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

Définition I.3 (composition)**.** *Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$.*
Si $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$, alors on définit la composée de g par f par :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Remarque I.3. *En pratique, on restreint le domaine de définition de f pour rendre compatible la composée de g par f.*

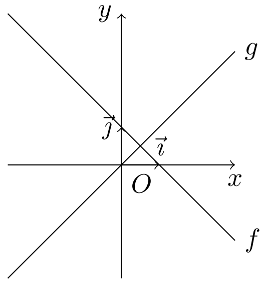
I.3 Relation d'ordre

On fixe $D \subset \mathbb{R}$. On définit sur les relations binaires $\leq$ et $<$ sur $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$ de la façon suivante :

Définition I.4 (Relation d'ordre). *Soit* $(f,g) \in (\mathcal{F}(D,\mathbb{R}))^2$.

1. *On note* $f \leq g$ *(sur D) si :* $\forall x \in D \quad f(x) \leq g(x)$.
   La relation $\leq$ *est alors une relation d'ordre sur* $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$.
2. *On note* $f < g$ *(sur D) si :* $\forall x \in D \quad f(x) < g(x)$.

Remarque I.4. *La relation d'ordre* $\leq$ *n'est pas totale. En effet, si on prend les fonctions* f *et* g *définies sur* $\mathbb{R}$ *telles que :* $f(x) = 1 - x$ *et* $g(x) = x$.
On a : $f(1) = 0 < g(1) = 1$ *et* $f(0) = 1 > 0 = g(0)$. *Par conséquent, on n'a ni* $g \leq f$ *ni* $f \leq g$. *On a la figure suivante :*



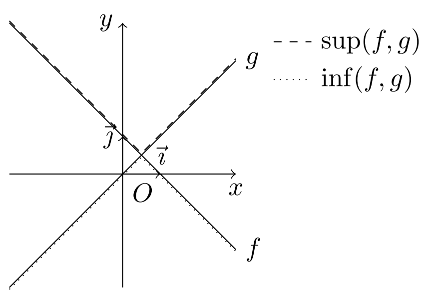
Dans le cas général, le maximum et le minimum de deux fonctions n'est pas définie pour la relation d'ordre $\leq$ que nous venons de définir. On peut par contre définir la borne supérieure et la borne inférieure de deux fonctions pour cette relation.

Définition I.5 (Bornes supérieure et inférieures de deux fonctions). *Soit* $(f,g) \in (\mathcal{F}(D,\mathbb{R}))^2$. *On définit les fonctions suivantes :*

1. $\inf(f,g)$ *appelée borne inférieure de* f *et de* g *par :* $\forall x \in D \quad \inf(f,g)(x) = \min(f(x), g(x))$.
2. $\sup(f,g)$ *appelée borne supérieure de* f *et de* g *par :* $\forall x \in D \quad \sup(f,g)(x) = \max(f(x), g(x))$.

Remarque I.5. *On a alors les propriétés suivantes :*

1. $\begin{cases} f \leq \sup(f,g) \\ g \leq \sup(f,g) \\ \forall h \in \mathcal{F}(D,\mathbb{R}) \quad f \leq h \text{ et } g \leq h \iff \sup(f,g) \leq h \end{cases}$
   $\sup(f,g)$ *est la plus petite fonction majorant à la fois* f *et* g.
2. $\begin{cases} f \geq \inf(f,g) \\ g \geq \inf(f,g) \\ \forall h \in \mathcal{F}(D,\mathbb{R}) \quad f \geq h \text{ et } g \geq h \iff \inf(f,g) \geq h \end{cases}$
   $\inf(f,g)$ *est la plus grande fonction minorant à la fois* f *et* g.
3. *On a la figure suivante :*



I.4 Fonctions majorées, minorées ou bornées

Définition I.6 (Fonction majorée, minorée ou bornée). *Soit* $f \in \mathcal{F}(D,\mathbb{R})$.

1. *La fonction* f *est majorée si* $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in D \quad f(x) \leq M$.
   Dans ces conditions, le nombre M *est appelé majorant de* f.
2. *La fonction* f *est minorée si* $\exists m \in \mathbb{R}\ \forall x \in D \quad f(x) \geq m$.
   Dans ces conditions, le nombre m *est appelé minorant de* f.

3. *La fonction f est bornée si elle est majorée et minorée.*
   i.e. si $\exists(m,M)\in\mathbb{R}^2\ \forall x\in D \quad m\leq f(x)\leq M$.

Proposition I.1 (Caractérisation par l'image de D par f)**.** *Soit $f\in\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$.*

1. *La fonction f est majorée si, et seulement si, l'ensemble $f(D)$ est majoré.*
2. *La fonction f est minorée si, et seulement si, l'ensemble $f(D)$ est minoré.*
3. *La fonction f est bornée si, et seulement si, l'ensemble $f(D)$ est borné.*

Définition I.7. *Soit $f\in\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$.*
On appelle bornes supérieure et inférieure de f sur D les quantités suivantes :

1. $\sup\limits_D(f)=\sup\{f(x)\ /\ x\in D\}=\sup(f(D))$
2. $\inf\limits_D(f)=\inf\{f(x)\ /\ x\in D\}=\inf(f(D))$

Remarque I.6. *On note également :*

1. $\sup\limits_{x\in D} f(x)=\sup\limits_D(f)$.
2. $\inf\limits_{x\in D} f(x)=\inf\limits_D(f)$.

Définition I.8 (Extremum)**.** *Soient $f\in\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$ et $a\in D$.*

1. *La fonction f admet un maximum (global) en a si : $\forall x\in D \quad f(x)\leq f(a)$.*
   i.e. si la fonction f est majorée par $f(a)$.
   On note alors : $\max\limits_D(f)=\max\limits_{x\in D} f(x)=f(a)$
2. *La fonction f admet un minimum (global) en a si : $\forall x\in D \quad f(x)\geq f(a)$.*
   i.e. si la fonction f est minorée par $f(a)$.
   On note alors : $\min\limits_D(f)=\min\limits_{x\in D} f(x)=f(a)$
3. *Dans les deux cas, la fonction f admet un extremum (global) en a.*

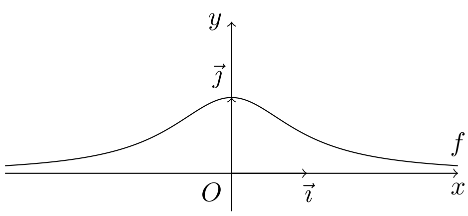
Remarque I.7.
1. *Si $\max\limits_D(f)$ existe, alors : $\max\limits_D(f)=\sup\limits_D(f)$.*
2. *Si $\min\limits_D(f)$ existe, alors : $\min\limits_D(f)=\inf\limits_D(f)$.*

Remarque I.8. Rappel : *Une fonction f vérifie une propriété (P) au voisinage de $a\in D$ s'il existe $\eta>0$ tel que $f_{|]a-\eta,a+\eta[\cap D}$ vérifie (P).*

Définition I.9 (extremum local)**.** *Soient $f\in\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$ et $a\in D$.*

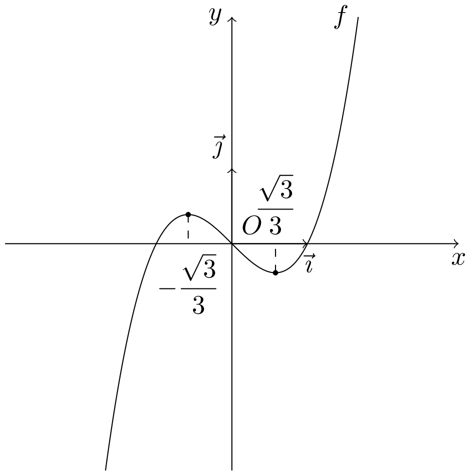
1. *La fonction f admet un maximum local en a s'il existe $\eta>0$ tel que : $\forall x\in]a-\eta,a+\eta[\cap D \quad f(x)\leq f(a)$.*
   i.e. si f est majorée par $f(a)$ au voisinage de a.
2. *La fonction f admet un minimum local en a s'il existe $\eta>0$ tel que : $\forall x\in]a-\eta,a+\eta[\cap D \quad f(x)\geq f(a)$.*
   i.e. si f est minorée par $f(a)$ au voisinage de a.
3. *Dans les deux cas, la fonction f admet un extremum local en a.*

Exemple I.2.
1. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.*
   On a : $\sup\limits_{\mathbb{R}}(f)=\max\limits_{\mathbb{R}}(f)=f(0)=1$
   et : $\inf\limits_{\mathbb{R}}(f)=0$.
   Cependant, la fonction f n'admet pas de minimum. En effet : $\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)>0$.
   On a le graphe suivant :



2. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3-x$.*
   On a : $\sup\limits_{\mathbb{R}}(f)=+\infty$
   et : $\inf\limits_{\mathbb{R}}(f)=-\infty$.

La fonction f n'admet donc ni maximum ni minimum.
Cependant, elle admet un maximum local en $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et un minimum local en $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
On a le graphe suivant :



I.5 Monotonie

Définition I.10 (Monotonie)**.** *Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$.*

1. *La fonction f est dite croissante si $\forall (x,y) \in D^2 \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$.*
   i.e. si les inégalités larges sont conservées par f.
2. *La fonction f est dite décroissante si $\forall (x,y) \in D^2 \quad x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$.*
   i.e. si les inégalités larges sont inversées par f.
3. *La fonction f est dite strictement croissante si $\forall (x,y) \in D^2 \quad x < y \implies f(x) < f(y)$.*
   i.e. si les inégalités strictes sont conservées par f.
4. *La fonction f est dite strictement décroissante si $\forall (x,y) \in D^2 \quad x < y \implies f(x) > f(y)$.*
   i.e. si les inégalités strictes sont inversées par f.
5. *La fonction f est dite monotone si elle est croissante ou décroissante.*
6. *La fonction f est dite strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Remarque I.9. *Une fonction constante est à la fois croissante et décroissante.*

Proposition I.2 (composition des fonctions monotones)**.** *Soient f et g deux fonctions monotones. On suppose que la fonction $g \circ f$ est bien définie.*
Alors la fonction $g \circ f$ est monotone.
Plus précisément :

1. *Si f et g ont la même monotonie, alors $g \circ f$ est croissante.*
2. *Si f et g ont une monotonie opposée, alors $g \circ f$ est décroissante.*

Remarque I.10. *On a le même énoncé dans le cas des monotonies strictes.*

Démonstration. (cas croissant)
On suppose que f et g sont croissantes.
Soient x et y deux éléments du domaine de définition de f tels que $x \leq y$.
Par la croissance de f, on a donc : $f(x) \leq f(y)$.
Par la croissance de g, on a donc : $g(f(x)) \leq g(f(y))$.
D'où : $(g \circ f)(x) \leq (g \circ f)(y)$.
La fonction $g \circ f$ est donc croissante. □

Proposition I.3.
1. *La somme de deux fonctions croissantes est croissante.*
2. *La somme de deux fonctions décroissantes est décroissante.*
3. *Le produit de deux fonctions croissantes et* **positives** *est croissante.*
4. *Le produit de deux fonctions décroissantes et* **positives** *est décroissante.*

5. *Si f est croissante et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :*
   (a) *si $\lambda > 0$, alors λf est croissante.*
   (b) *si $\lambda < 0$, alors λf est décroissante.*

   Si f est décroissante et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :
   (a) *si $\lambda > 0$, alors λf est décroissante.*
   (b) *si $\lambda < 0$, alors λf est croissante.*

Remarque I.11. *On a le même énoncé dans le cas des monotonies strictes.*

I.6 Parité

Les notions de parité et d'imparité de fonctions ont été traitées dans le chapitre "fonctions usuelles". (A relire !)

I.7 Fonctions périodiques

Définition I.11. *Soient $T > 0$ et f une fonction réelle définie sur $D \subset \mathbb{R}$. La fonction f est dite T-périodique si :*

1. $\forall x \in D \quad x \in D \iff x + T \in D \qquad (\sharp)$
2. $\forall x \in D \quad f(x+T) = f(x)$.

Exemple I.3. *La fonction* tan *est définie sur* $\mathcal{D}_{\tan} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$.

On a : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \quad x \in \mathcal{D}_{\tan} \iff x + \pi \in \mathcal{D}_{\tan} \\ \forall x \in \mathcal{D}_{\tan} \quad f(x+\pi) = f(x) \end{cases}$

La fonction tan *est donc π-périodique.*

Dorénavant, on suppose que D est un ensemble vérifiant la propriété $(\sharp)$ et $T > 0$.

Proposition I.4. *Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ une fonction T périodique.*
Alors : $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in D \quad f(x+nT) = f(x)$.

Démonstration. Par récurrence, on montre aisément que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad f(x+nT) = f(x)$.
Soit $x \in D$.
Par l'équivalence $(\sharp)$ en remplaçant x par $x - T$, on déduit : $x - T \in D$.
On obtient ainsi : $f(x) = f((x-T)+T) = f(x-T)$.
Enfin, on montre également par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad f(x-nT) = f(x)$.
On en déduit : $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in D \quad f(x+nT) = f(x)$. □

Proposition I.5 (Opérations)**.** *Soient f et g deux fonctions T-périodiques définies sur D. Soit h une fonction. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1. *Les fonctions constantes égales à 0 et à 1 sont des fonctions T-périodiques.*
2. *$f + g$ est T-périodique.*
3. *λf est T-périodique.*
4. *fg est T-périodique.*
5. *$h \circ f$ est T-périodique.*

Remarque I.12.
1. *Les propriétés 1, 2 et 4 font de l'ensemble des fonctions T-périodiques un sous-anneau de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$.*
2. *Les propriétés 1, 2 et 3 font de l'ensemble des fonctions T-périodiques un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$.*

Proposition I.6. *Soit f une fonction T-péridique. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.*
Alors, la fonction $(x \mapsto f(ax+b))$ est $\frac{T}{|a|}$-periodique.

Démonstration. (exercice) □

Remarque I.13. *On retrouve ainsi qu'un signal sinusoïdal de pulsation ω est $\frac{2\pi}{\omega}$-périodique.*