# Formulaire de calcul

## Identités remarquables

| | |
|---|---|
| $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ | $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ |
| $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ | $a^2+b^2=(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b)$ |

Généralisation :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j$$

Cas particuliers :

$(a_1+a_2+a_3)^2 = a_1^2+a_2^2+a_3^2+2a_1a_2+2a_1a_3+2a_2a_3$

$$\begin{aligned}(a_1+a_2+a_3+a_4)^2 = {} & a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2\\ & +2a_1a_2+2a_1a_3+2a_1a_4\\ & +2a_2a_3+2a_2a_4\\ & +2a_3a_4\end{aligned}$$

## Formules de puissance

| | |
|---|---|
| $a^{n+m}=a^n.a^m$ | $a^n.b^n=(ab)^n$ |
| $(a^n)^m=a^{nm}$ | $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ |
| $\dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$ | $\dfrac{a^n}{b^n}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ |

## Logarithme

Si $x>0$ et $y>0$ :

| | | |
|---|---|---|
| $\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$ | $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\ln(x)$ | $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y)$ |
| $\ln(x^n)=n\ln(x)$ | $\ln(x^\alpha)=\alpha\ln(x)$ | $\ln(\mathrm{e}^x)=x,\ \exp(\ln(x))=x$ |

## Racines $p^{\text{ème}}$ - Puissances non entières

Définitions :

- $\sqrt[p]{\ }$ est la réciproque de $(x\mapsto x^p)$ sur $\mathbb{R}^+$ si $p$ est pair et sur $\mathbb{R}$ si $p$ est impair.
- Si $x>0$, $x^\alpha=\exp(\alpha\ln(x))$

Si $x>0$ et $y>0$, on a :

| | |
|---|---|
| $\sqrt[p]{x}=x^{\frac{1}{p}}$ | |
| $x^{\alpha+\beta}=x^\alpha.x^\beta$ | $x^\alpha.y^\alpha=(xy)^\alpha$ |
| $(x^\alpha)^\beta=x^{\alpha\beta}$ | $x^{-\alpha}=\dfrac{1}{x^\alpha}$ |
| $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta}=x^{\alpha-\beta}$ | $\dfrac{x^\alpha}{y^\alpha}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha$ |

| | |
|---|---|
| $\sqrt{x^2}=\lvert x\rvert=\begin{cases}x \text{ si } x\geq 0\\ -x \text{ si } x<0\end{cases}$ | $\sqrt[n]{x^n}=\begin{cases}\lvert x\rvert \text{ si } n \text{ est pair}\\ x \text{ si } n \text{ est impair}\end{cases}$ |
| Si $x\geq 0$, $\left(\sqrt{x}\right)^2=x$ | Si $x\geq 0$ ou $n$ impaire, $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=x$ |

## Formules sommatoires

Formules fondamentales :

$$\sum_{k=p}^{q+1} a_k = a_{q+1}+\sum_{k=p}^{q} a_k \qquad \sum_{k=p-1}^{q} a_k = a_{p-1}+\sum_{k=p}^{q} a_k$$

Découpage :

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=p}^{r} a_k + \sum_{k=r+1}^{q} a_k \quad (p\leq r\leq q)$$

$$\sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1}$$

Réindexation :

| | |
|---|---|
| $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=p+r}^{q+r} a_{k-r}$ | $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=r-q}^{r-p} a_{r-k}$ |

Doubles sommations :

| | |
|---|---|
| $\displaystyle\sum_{k=p_1}^{q_1}\sum_{l=p_2}^{q_2} a_{k,l} = \sum_{l=p_2}^{q_2}\sum_{k=p_1}^{q_1} a_{k,l}$ | $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k} a_{k,l} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=l}^{n} a_{k,l}$ |

## Formules élémentaires

| | |
|---|---|
| $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} a = (q-p+1)a$ | $\displaystyle\prod_{k=p}^{q} a = a^{q-p+1}$ |
| $\displaystyle\prod_{k=p}^{q} a^{\alpha_k} = a^{\sum_{k=p}^{q}\alpha_k}$ | |

## Suites arithmétiques

Définition :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $a\in\mathbb{C}$ si :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=u_n+a$$

Propriétés :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $a$.
Alors :

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 + na$
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_p + (n-p)a$
3. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \displaystyle\sum_{k=p}^{q} u_k = (q-p+1)\frac{u_p+u_q}{2}$

Cas particulier :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

**Suites géométriques**

Définition :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $a \in \mathbb{C}$ si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = a.u_n$$

Propriétés :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q$.
Alors :

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0.q^n$
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_p.q^{n-p}$
3. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \displaystyle\sum_{k=p}^{q} u_k = u_p\frac{1-q^{q-p+1}}{1-q}$

Cas particuliers :

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

**Coefficients binomiaux**

Définition :

$\binom{n}{k}$ est le nombre de tirages possibles de $k$ éléments parmi $n$ éléments.

Formule générale :

$$\text{Si } 0 \leq k \leq n,\ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

Cas particuliers :

$$\binom{n}{0} = 1,\ \binom{n}{1} = n,\ \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},\ \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3\times 2}, \dots$$

Formules :

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \quad\Big|\quad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \quad \text{(Formule du triangle de Pascal)}$$

Triangle de Pascal :

$$\begin{array}{c|llllll}
 & \xrightarrow{k} & & & & & \\
n\downarrow & 1 & & & & & \\
 & 1 & 1 & & & & \\
 & 1 & 2 \xrightarrow{+} & 1 & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
 & 1 & 4 & 6 \xrightarrow{+} & 4 & 1 & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

**Binôme de Newton**

Si $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Cas particuliers :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ | $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ | $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

**Factorisations :**

Cas général :

$$X^n - Y^n = (X-Y)\sum_{k=0}^{n-1} X^k Y^{n-1-k}$$
$$= \prod_{k=0}^{n-1} X - \mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{n}} Y$$

Cas particuliers :

$$X^n - 1 = (X-1)\sum_{k=0}^{n-1} \quad = \prod_{k=0}^{n-1} X - \mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{n}}$$

$$X^n - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \prod_{k=0}^{n-1} X - \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}$$