Chapitre 0

Fondements des mathématiques

I Logique

I.1 Logique booléenne

I.1.a Définitions

Définition I.1. *Une proposition est une phrase dont il est pertinent de se demander si elle est vraie ou fausse.*

Exemple I.1. 1. *Les phrases suivantes sont des propositions :*
- *"Le livre est ouvert."*
- *"Le ciel est vert."*
- *"Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est la somme des carrés des deux autres côtés."*

2. *Les phrases suivantes ne sont pas des propositions :*
- *"Assis-toi !"*
- *"Quelle heure est-il ?"*

Définition I.2 (Valeur de vérité). 1. *Soit P une proposition.*
Si P est vraie, alors la valeur de vérité de P est V et on note : $P \equiv V$. Sinon, P est fausse, la valeur de vérité de P est F et on note : $P \equiv F$.

2. *Soient P_1 et P_2 deux propositions.*
Si P_1 et P_2 ont la même valeur de vérité, alors on note $P_1 \equiv P_2$. Sinon, on note : $P_1 \not\equiv P_2$.

Remarque I.1. La notation $\equiv$ ne sera utilisée que dans cette partie. *Elle ne sera plus utilisée ailleurs.*

I.1.b Opérateurs logiques élémentaires

Définition I.3 (Opérateurs logiques élémentaires). *Soient P, P_1 et P_2 trois propositions. On construit les propositions P_1 et P_2, P_1 ou P_2 et $\text{non}(P)$ à l'aide des tables de vérité suivantes :*

Table de vérité de la loi "et"

P_1	P_2	P_1 et P_2
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Table de vérité de la loi "ou"

P_1	P_2	P_1 ou P_2
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Table de vérité de la loi "non"

P	$\text{non}(P)$
F	V
V	F

Remarque I.2. 1. *On observera que la proposition P_1 ou P_2 est vraie si les propositions P_1 et P_2 sont toutes les deux vraies.*

2. *La proposition $\text{non}(P)$ est appelée négation de P. Il ne s'agit pas nécessairement de la forme négative de la phrase P. De même, une proposition en totale contradiction avec P ne convient pas toujours. La proposition $\text{non}(P)$ exprime l'exact opposé de P, l'opposé du point de vue sémantique.*

Exemple I.2. *La négation de la phrase "Tous les jours il pleut" n'est ni "Tous les jours il ne pleut pas" ni "Tous les jours il fait beau" mais "Il y a des jours où il ne pleut pas".*

Théorème I.1 (Principes fondamentaux). *Soit P une proposition. On a alors les relations suivantes :*
1. $\text{non}(\text{non}(P)) \equiv P$ *(principe de double négation)*
2. P ou $\text{non}(P) \equiv V$ *(principe du tiers exclus)*
3. P et $\text{non}(P) \equiv F$ *(principe de non-contradiction)*

De nombreuses propriétés d'ordre calculatoire peuvent être établies à partir de ces opérateurs :

Proposition I.1 (Propriétés calculatoires). *Soient P_1, P_2 et P_3 des propositions :*

1. *Les opérations* et *et* ou *sont associatives :*
   (a) $(P_1 \text{ ou } P_2) \text{ ou } P_3 \equiv P_1 \text{ ou } (P_2 \text{ ou } P_3)$
   (b) $(P_1 \text{ et } P_2) \text{ et } P_3 \equiv P_1 \text{ et } (P_2 \text{ et } P_3)$
2. *Les opérations* et *et* ou *sont commutatives :*
   (a) $P_1 \text{ ou } P_2 \equiv P_2 \text{ ou } P_1$
   (b) $P_1 \text{ et } P_2 \equiv P_2 \text{ et } P_1$
3. *Les opérations* et *et* ou *sont distributives l'une par rapport à l'autre :*
   (a) i. $(P_1 \text{ ou } P_2) \text{ et } P_3 \equiv (P_1 \text{ et } P_3) \text{ ou } (P_2 \text{ et } P_3)$
   ii. $P_1 \text{ et } (P_2 \text{ ou } P_3) \equiv (P_1 \text{ et } P_2) \text{ ou } (P_1 \text{ et } P_3)$
   (b) i. $(P_1 \text{ et } P_2) \text{ ou } P_3 \equiv (P_1 \text{ ou } P_3) \text{ et } (P_2 \text{ ou } P_3)$
   ii. $P_1 \text{ ou } (P_2 \text{ et } P_3) \equiv (P_1 \text{ ou } P_2) \text{ et } (P_1 \text{ ou } P_3)$

Remarque I.3. *Remarquons qu'en remplaçant* et *par $\times$ et* ou *par $+$, nous retrouvons des propriétés habituelles de $+$ et $\times$ (sauf ces deux dernières propriétés). On perçoit ici la dimension calculatoire de cette théorie.*

Enfin, les lois de De Morgan caractérisent la négation des lois "et" et "ou" :

Théorème I.2. *(lois de De Morgan)*
Soient P_1 et P_2 deux propositions. On a les propriétés suivantes :

1. $\text{non}(P_1 \text{ et } P_2) \equiv \text{non}(P_1) \text{ ou } \text{non}(P_2)$
2. $\text{non}(P_1 \text{ ou } P_2) \equiv \text{non}(P_1) \text{ et } \text{non}(P_2)$

Exemple I.3. *Traiter le cas :*

1. P_1 : *"Il pleut."*
2. P_2 : *"Il fait beau."*

I.1.c Implication

Un théorème mathématique est composé de deux composantes : les hypothèses H et la conclusion C. L'énoncé du théorème est alors l'affirmation de la proposition "Si H est vérifié, alors C est vérifié" ou encore "la véracité du fait H implique celle de C". Pour traiter ce type de proposition, on introduit le connecteur logique "$\Longrightarrow$" :

Définition I.4 (Implication). *On définit le symbole d'implication $\Longrightarrow$ par la relation suivante :*

$$\boxed{(P_1 \Longrightarrow P_2) \equiv (\text{non}(P_1) \text{ ou } P_2)}$$

La proposition $P_1 \Longrightarrow P_2$ se lit "Si P_1, alors P_2" ou "P_1 implique P_2".

Table de vérité de la loi "$\Longrightarrow$"

P_1	P_2	$P_1 \Longrightarrow P_2$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Remarque I.4. *Remarquons que si la proposition P_1 est fausse, alors l'implication $P_1 \Longrightarrow P_2$ est vraie. Ainsi, sous des hypothèses contradictoires, vous pouvez démontrer ce que vous voulez.*

Exemple I.4. *Exprimer "S'il pleut, alors il ne fait pas beau" à l'aide des propositions P_1 et P_2 précédentes.*

Proposition I.2 (Implication et négation). *Soient P_1 et P_2 deux propositions. On a les égalités suivantes :*

1. $\text{non}(P_1 \Longrightarrow P_2) \equiv (P_1 \text{ et } \text{non}(P_2))$
2. $(P_1 \Longrightarrow P_2) \equiv (\text{non}(P_2) \Longrightarrow \text{non}(P_1))$ *(principe de contraposition)*

Définition I.5. *On considère P_1 et P_2 deux propositions.*

1. *La proposition "$\text{non}(P_2) \Longrightarrow \text{non}(P_1)$" est appelée contraposée de l'implication "$P_1 \Longrightarrow P_2$".*
2. *La proposition "$P_2 \Longrightarrow P_1$" est appelée réciproque de l'implication "$P_1 \Longrightarrow P_2$".*

Remarque I.5. *La proposition précédente nous assure qu'une implication est équivalente à sa contraposée. Par contre, elle n'est pas équivalente à sa réciproque.*

Exemple I.5. *Donner la négation, la contraposée et la réciproque de l'exemple précédent.*

Proposition I.3 (Propriétés classiques). *Soient P_1, P_2 et P_3 trois propositions. Les propositions suivantes sont vraies :*

1. $\big((P_1 \implies P_2) \text{ et } (P_2 \implies P_3)\big) \implies (P_1 \implies P_3)$ *(transitivité)*
2. $\big(P_1 \text{ et } (P_1 \implies P_2)\big) \implies P_2$ *(syllogisme)*
3. $\big((P_1 \implies P_2) \text{ et } (\text{non}(P_1) \implies P_2)\big) \implies P_2$ *(disjonction de cas)*

I.1.d Équivalence

Définition I.6 (Equivalence). *L'équivalence de deux propositions P_1 et P_2 signifie qu'elles ont même valeur de vérité. On note alors : $P_1 \iff P_2$ et on dit : "P_1 et P_2 sont équivalentes" ou encore "P_1 si et seulement si P_2".*

Table de vérité de la loi "$\iff$"

P_1	P_2	$P_1 \iff P_2$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Remarque I.6. *Remarquons immédiatement que les affirmations "$P_1 \equiv P_2$" et "$(P_1 \iff P_2) \equiv V$" sont synonymes. A partir de la section I.2, nous n'utiliserons plus que la notation des équivalences.*

Proposition I.4. *Soit P_1 et P_2 deux propositions. On a les propriétés suivantes :*

1. $P_1 \iff P_2 \equiv (P_1 \implies P_2) \text{ et } (P_2 \implies P_1)$ *(principe de double implication)*
2. $P_1 \iff P_2 \equiv \text{non}(P_1) \iff \text{non}(P_2)$

Remarque I.7. *Lorsque l'on fait un raisonnement par équivalences, typiquement lorsque l'on résout une équation ou un système d'équations, le principe de double implication nous impose de vérifier aussi bien les implications directes que les implications réciproques.*

I.2 Quantificateurs

La notion de proposition et ses opérations (et, ou, non...) sont relativement limitées. Elles ne permettent pas de construire de manière naturelle certains énoncés plus élaborés à partir d'énoncés élémentaires. Par exemple, la proposition "Tous les jours, il pleut" ne peut être construite à l'aide de propositions plus élémentaires. Pourtant, elle semble construite autour de la proposition "il pleut". En fait, l'expression "il pleut" n'est pas ici à proprement parler une proposition. En effet, elle dépend d'un paramètre : le jour auquel elle s'applique. Nous dirons que l'expression "il pleut" est un prédicat sur l'ensemble des jours. Pour exprimer "Tous les jours", nous introduirons un opérateur portant sur les prédicats le quantificateur $\forall$.

Définition I.7 (Ensemble). *On appelle un ensemble une collection d'objets a,b,... On note : $\{a, b, ...\}$.*
Les objets d'un ensemble sont appelés éléments de l'ensemble. Si l'ensemble est noté E et l'objet x, on note : $x \in E$ si x est un élément de l'ensemble et $x \notin E$ si x n'est pas un élément d'un ensemble.

Définition I.8 (Ensemble vide). *Il existe un unique ensemble qui ne contient aucun élément. Il est appelé ensemble vide. Il est noté : $\emptyset$.*

Remarque I.8. *Bien que la théorie des ensembles sera développée plus loin, il convient de faire immédiatement plusieurs remarques :*

1. *Le mot "ensemble" est à prendre au sens commun : "réunion d'éléments formant un tout". Par exemple, on parle de l'ensemble des français, l'ensemble des livres d'une bibliothèque,... En mathématiques, on pourra penser à des exemples comme aux ensembles de nombres comme $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'ensemble des points d'une droite, d'un cercle, d'un plan...*
2. *Comme dans le sens commun, l'ordre des termes d'un ensemble est sans importance. On a par exemple : $\{0, 1, 2\} = \{2, 0, 1\}$.*
3. *Une expression quelle qu'elle soit entre deux accolades $\{\quad\}$ représente un ensemble.*

Exemple I.6.

1. *L'ensemble $\{1, 2, 3\}$ est l'ensemble constitué des nombres 1, 2 et 3.*
2. *L'ensemble $\{\sin, \cos, \tan\}$ est l'ensemble constitué des fonctions $\sin$, $\cos$ et $\tan$.*
3. *On peut tout à fait mélanger les genres. L'ensemble $\{1, 2, 3, \sin, \cos, \tan\}$ est l'ensemble constitué des nombres 1, 2 et 3 et des fonctions $\sin$, $\cos$ et $\tan$.*

4. *Un ensemble peut être constitué d'un seul élément. On parle alors de singleton. Par exemple,* $\{1\}$ *est l'ensemble dont l'unique élément est* 1.

Remarque I.9. *On ne confondra pas un singleton et son unique élément. On a :* $1 \neq \{1\}$. *L'auteur de ces quelques lignes n'est pas un ensemble. Il est pourtant l'unique élément de l'ensemble des auteurs de ce document.*

Avant d'introduire les quantificateurs, il nous faut introduire la notion de prédicat :

Définition I.9 (Prédicat)**.** *Soit* E *un ensemble.*
On appelle prédicat P *sur* E *la donnée d'une proposition* $P(x)$ *pour chaque élément* x *de* E.

Exemple I.7.
1. *Sur* $\mathbb{R}$, *on a le prédicat* P *"...est positif". Il est défini pour chaque* $x \in \mathbb{R}$ *par :* $P(x) \equiv x \geq 0$. *La proposition* $P(x)$ *est vraie si* $x \geq 0$ *et fausse sinon :* $P(1)$ *est vrai,* $P(-1)$ *est fausse.*
2. *Une équation est un prédicat sur son ensemble de définition. Par exemple :* $x^2 + x - 1 = 0$ *sur* $\mathbb{R}$, $\ln(x) + 2 = x$ *sur* $\mathbb{R}^{+*}$*...*
3. *Plus concrètement, sur l'ensemble de la population française, on a le prédicat* Q *"...a plus de 25 ans". Pour chaque français* x, *la proposition* $Q(x)$ *est vraie si la personne* x *a plus de 25 ans et fausse sinon.*

Les quantificateurs permettent de construire des propositions à partir de prédicats :

Définition I.10 (Quantificateurs)**.** *Soient* E *un ensemble et* P *un prédicat sur* E. *On définit les propositions suivantes :*
1. $\forall x \in E \quad P(x)$ *: "Pour tout* x *appartenant à* E, $P(x)$*." ou "Quel que soit* x *appartenant à* E, $P(x)$*."*
2. $\exists x \in E \quad P(x)$ *: "Il existe* x *appartenant à* E *tel que* $P(x)$*."*
3. $\exists! x \in E \quad P(x)$ *: "Il existe un unique* x *appartenant à* E *tel que* $P(x)$*."*

On convient : $\big(\exists x \in \emptyset \quad P(x)\big) \equiv F$ *et* $\big(\forall x \in \emptyset \quad P(x)\big) \equiv V$.

Remarque I.10. *La convention précédente se justifie par le fait que les éléments de l'ensemble vide n'existe pas. Il vérifie donc toutes les propriétés imaginables.*

Exemple I.8. *Donner une expression quantifiée suivantes des affirmations suivantes :*
1. P_1 *: "Tous les réels ont un carré positif" :*
2. P_2 *: "L'équation* $\exp(x) = x$ *admet une solution dans* $\mathbb{R}$*" :*
3. P_3 *: "La fonction* $\exp$ *est à valeurs dans* $\mathbb{R}^{+*}$*" :*
4. P_4 *: "L'équation* $x^3 + x + 1 = 0$ *admet une unique solution réel" :*
5. P_5 *: "Le polynôme* $X^2 + 1$ *n'admet pas de racine réelle" :*

Remarque I.11. *Il faut immédiatement remarquer que l'on a les équivalences suivantes :*

$$\forall x \in E \quad P(x) \iff \forall y \in E \quad P(y)$$

$$\exists x \in E \quad P(x) \iff \exists y \in E \quad P(y)$$

C'est-à-dire que les noms des variables d'une expression quantifiée n'ont pas de sens intrinsèque. Changer leur nom ne change pas le sens de l'expression quantifiée. On parle de variables muettes.

Proposition I.5 (Négation d'une expression quantifiée)**.** *Soient* E *un ensemble et* P *un prédicat défini sur* E. *On a les équivalences suivantes :*
1. $\mathrm{non}(\forall x \in E \quad P(x)) \iff \exists x \in E \quad \mathrm{non}(P(x))$
2. $\mathrm{non}(\exists x \in E \quad P(x)) \iff \forall x \in E \quad \mathrm{non}(P(x))$

Exemple I.9. *Donner les négations des exemples précédents.*

Un prédicat peut lui même s'exprimer à l'aide de quantificateurs. Il est donc possible d'exprimer une propriété à l'aide de plusieurs variables. Compléter la proposition suivante :

Proposition I.6 (Inversion des quantificateurs)**.** *Soient* E *et* F *deux ensembles et* P *un prédicat sur* $E \times F$. *On a alors :*
1. $\exists x \in E\ \exists y \in F \quad P(x,y) \qquad \exists y \in F\ \exists x \in E \quad P(x,y)$
2. $\forall x \in E\ \forall y \in F \quad P(x,y) \qquad \forall y \in F\ \forall x \in E \quad P(x,y)$
3. $\exists x \in E\ \forall y \in F \quad P(x,y) \qquad \forall y \in F\ \exists x \in E \quad P(x,y)$

I.3 Méthodes de raisonnement classiques

I.3.a Démonstrations directes

Il est toujours possible de se lancer dans une démonstration d'une manière directe. Si vous n'arrivez pas à déterminer a priori une stratégie de démonstration, vous devez démarrer une telle démarche. Ce n'est pas un exercice de réflexion mais cela doit devenir un réflexe. Cela permet de poser le problème et de se concentrer sur l'essentiel. Nous donnons l'introduction et la conclusion de ces démonstrations.

α) Implication $H \implies C$:

"On suppose H.
Montrons C.
⋮
⋮On raisonne en exploitant l'hypothèse H.
⋮
On en déduit C.
Par conséquent, on a démontré : $H \implies C$"

β) Équivalence $P \iff Q$:

La méthode directe de démonstration d'une équivalence est le raisonnement par équivalence.
"On a : $P \iff P_1$

$$\begin{aligned} &\iff P_2 \\ &\iff \dots \\ &\iff P_n \\ &\iff Q \end{aligned}$$

On en déduit : $P \iff Q$"
Une rédaction alternative est la suivante :
"Les propositions suivantes sont équivalentes :
P
P_1
P_2
...
P_n
Q
On en déduit : $P \iff Q$"

Remarque I.12. *Sans une phrase introductive une telle rédaction ne sera en aucun cas acceptée.*

γ) Phrase quantifiée $\forall x \in E \quad P(x)$:

"Soit $x \in E$.
Montrons $P(x)$.
⋮
D'où : $P(x)$.
On en déduit : $\forall x \in E \quad P(x)$"

δ) Phrase quantifiée $\exists x \in E \quad P(x)$:

"On cherche $x \in E$ vérifiant $P(x)$.
⋮
⋮(travail préalable par conditions nécessaires permettant de définir le "x" recherché)
⋮
On pose $x = \dots$.
Vérifions $x \in E$ et $P(x)$.
⋮
D'où : $P(x)$.
On en déduit : $\exists x \in E \quad P(x)$."

Exemple I.10. *Montrer* $\exists n \in \mathbb{N} \quad (-1)^n = 1$.

ϵ) Unicité de $x \in E$ vérifiant $P(x)$:

Il n'est pas nécessaire d'avoir démontrer l'existence d'une quantité pour en démontrer l'unicité.
"Soient $x_1 \in E$ et $x_2 \in E$ vérifiant $P(x_1)$ et $P(x_2)$.

Montrons $x_1 = x_2$.
$\vdots$
D'où : $x_1 = x_2$.
On en déduit que s'il existe $x \in E$ vérifiant $P(x)$, alors il est unique."

I.3.b Décomposition d'un problème

De nombreuses démonstrations se font en découpant un problème en sous-problèmes plus simples. On utilise alors indifféremment les techniques de démonstrations directes présentées précédemment ou les techniques plus indirectes que nous présenterons après cette partie.

α) Distinction de cas :
Cette technique consiste à démontrer une propriété P en déterminant une propriété Q et en démontrant les propositions $Q \implies P$ et non$(Q) \implies P$.

Remarque I.13. *Plus généralement, on détermine Q_1, Q_2,...Q_n des propositions. On démontre alors $Q_1 \implies P$, ..., $Q_n \implies P$ et Q_1* ou *Q_2* ou ... ou *Q_n (ce dernier point est souvent éludé car il est généralement trivial).*

Exemple I.11. *Montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \dfrac{1+(-1)^n}{2+(-1)^n} \leq \dfrac{2}{3}$.

β) Double implication :
Rappelons nous la proposition suivante : $(P \iff Q) \iff (P \implies Q$ et $Q \implies P)$. Par conséquent, la démonstration de l'équivalence $P \iff Q$ peut se faire en démontrant $P \implies Q$ puis $Q \implies P$.

γ) Analyse-synthèse : La technique d'analyse-synthèse est une technique permettant d'établir l'existence et l'unicité d'une quantité. On souhaite donc établir : $\exists! x \in E \quad P(x)$. Pour cela, on travaille en deux étapes :
- **Analyse :** On suppose qu'il existe un tel $x \in E$. En exploitant le fait que $x \in E$ et $P(x)$, on détermine l'unique valeur possible de x.
- **Synthèse :** On vérifie que la valeur trouvée convient. On démontre que cette valeur est bien dans E et qu'elle vérifie la propriété P.

Remarque I.14. *Remarquez que la phase d'analyse établi l'unicité de x et non son existence.*

Exemple I.12. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.*
Montrer, par analyse-synthèse, qu'il existe un unique couple (f_i, f_p) de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ respectivement impaire et paire tel que : $f = f_i + f_p$.

Remarque I.15. *Une variante de la méthode ci-dessus consiste en phase d'analyse de déterminer un ensemble de valeurs possibles pour x puis de sélectionner celles qui conviennent.*

I.3.c Démonstration par contraposition

Rappelons-nous l'équivalence suivante : $(P \implies Q) \iff (\text{non}(Q) \implies \text{non}(P))$. Pour démontrer $P \implies Q$, il suffit donc de démontrer non$(Q) \implies$ non(P). Dans ce cas, il faut que vous annonciez la démonstration de la contraposée.

I.3.d Raisonnement par l'absurde

On cherche à démontrer une propriété P. Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer la négation de P et à obtenir une contradiction. Ainsi, on a démontré : non$(P) \implies F$. Cela impose que la propriété P est vraie.

Remarque I.16. *La négation de $H \implies C$ est H* et non(C). *Démontrer $H \implies C$ par l'absurde consiste à supposer H* et non(C) *et à obtenir une contradiction.*
Dans ce cas, il est considéré comme maladroit de rédiger une démonstration par l'absurde lorsque le raisonnement s'adapte facilement en une démonstration par contraposition.

Exemple I.13. *Montrer par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.*

I.3.e Raisonnement par récurrence

La technique de récurrence est une technique très importante de démonstration. Elle permet de démontrer des phrases quantifiées du type : $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$. Elle sera développée plus en détail dans un chapitre ultérieur. Nous rappelons les bases de ce principe.

Théorème I.3 (Récurrence simple). *Soit P un prédicat sur $\mathbb{N}$.*
On suppose :

1. *$P(0)$ est vraie. (Initialisation)*
2. *$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \implies P(n+1)$ (Hérédité)*

Alors, on a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$.

Démonstration. La preuve de ce résultat sera donnée plus tard. □

Remarque I.17. *La phase d'initialisation peut être faite à n'importe quel rang $n_0 \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, la conclusion devient : $\forall n \geq n_0 \quad P(n)$.*

La rédaction d'une récurrence se fait de la façon suivante :
"Montrons, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$.
Initialisation : Montrons $P(0)$.
...
Donc, $P(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.
On suppose $P(n)$.
Montrons $P(n+1)$.
⋮
⋮(on se sert de $P(n)$ pour démontrer $P(n+1)$)
⋮
Donc, $P(n+1)$ est vraie.
La propriété P est héréditaire.
Par récurrence, on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$."

Remarque I.18.
1. *Il est impératif de définir précisément l'hypothèse de récurrence.*
2. *Pour éviter de répéter l'énoncé de la propriété P, il est conseillé de lui donner un nom.*
3. **Très important :** *La démonstration de l'hérédité n'est pas à proprement parler la démonstration de $P(n+1)$. Il s'agit de la démonstration de $P(n) \implies P(n+1)$; ce qui revient à la démonstration de $P(n+1)$ sous l'hypothèse $P(n)$. Votre rédaction ne doit en aucun laisser paraître une telle confusion.*
4. *Si vous faites une récurrence sans utiliser l'hypothèse de récurrence, cela sera considéré comme très maladroit. Cela témoignera soit d'une erreur de raisonnement soit du fait que la preuve par récurrence était inutile.*

Exemple I.14. *Montrer, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (P_n).*

Remarque I.19. *Nous donnons encore quelques remarques supplémentaires :*

1. *Si vous souhaitez démontrer une proposition du type : $\forall n \in \mathbb{Z} \quad P(n)$. On peut envisager deux stratégies reposant sur une récurrence. La première consiste à démontrer d'abord par récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$ puis à démontrer $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \implies P(-n)$. La seconde consiste à démontrer par récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(-n)$.*
2. *Signalons également une erreur classique. Lorsque l'on étudie les suites, on établit souvent ce que l'on appelle des relations de récurrence ; c'est-à-dire, pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une relation reliant u_{n+1} à u_n ou plus généralement reliant u_n, u_{n+1}, ..., u_{n+p}. Pour établir une telle relation, il n'est pas toujours nécessaire de requérir à une récurrence. Une preuve directe est souvent possible.*

II Un peu de théorie des ensembles

II.1 Relation entre ensembles

Tout d'abord, définissons l'égalité de deux ensembles :

Définition II.1 (Égalité d'ensembles). *Soit A et B deux ensembles.*
On définit l'égalité des ensembles A et B par l'équivalence suivante :

$$A = B \iff \forall x \quad x \in A \iff x \in B$$

Remarque II.1. *La définition affirme simplement que deux ensembles sont égaux si, et seulement si, ils ont exactement les mêmes éléments.*

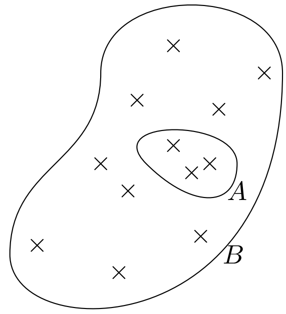
Lorsque les éléments d'un ensemble A sont également dans un ensemble B, on dit que l'ensemble A est inclus dans B. Plus formellement, on a la définition suivante :

Définition II.2 (Inclusion - Ensemble des parties)**.**

1. *Soient A et B deux ensembles.*
   On dit que A est inclus dans B si

   $$\forall x \in A \quad x \in B$$

   i.e. Les éléments de A sont tous des éléments de B.
   Dans ces conditions, on dit également A est une partie de B et on note $A \subset B$.
   Si A n'est pas inclus dans B, on note : $A \not\subset B$.



2. *On admet que les parties d'un ensemble E forment un ensemble noté $\mathcal{P}(E)$.*

Exemple II.1.

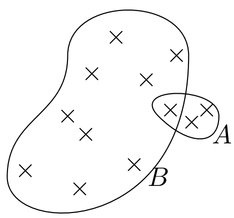
1. *Les intervalles sont des parties de $\mathbb{R}$. Par exemple, on a : $[0,1] \subset \mathbb{R}$.*
2. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$*,* $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$*,* $\mathcal{P}(\{a,b\}) =$

Remarque II.2. *On ne confondra pas les symboles $\in$ et $\subset$. On a, par exemple :*

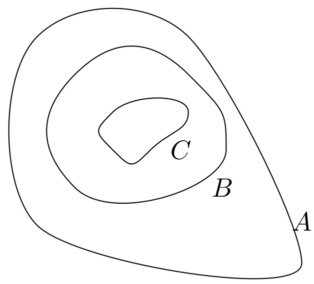
1. $0 \in \{0,1\}$ *et* $0 \not\subset \{0,1\}$
2. $\{0\} \notin \{0,1\}$ *et* $\{0\} \subset \{0,1\}$
3. $\{0\} \in \{0,\{0\}\}$ *et* $\{0\} \subset \{0,\{0\}\}$

Proposition II.1 (Propriétés classiques)**.** *Soit A ,B et C trois ensembles. On a les propriétés suivantes :*

1. $\emptyset \subset A$
2. $A \subset A$
3. $A \not\subset B \iff \exists x \in A \quad x \notin B$



4. $(A \subset B$ et $B \subset C) \implies A \subset C$ *(Transitivité de l'inclusion)*



Exemple II.2. *On a :* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
Donc : $\mathbb{N} \subset \mathbb{C}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, ...

La notion d'inclusion permet de caractériser l'égalité de deux ensembles :

Proposition II.2 (Principe de double inclusion)**.** *Soient A et B deux ensembles.*
On a les équivalences suivantes :

1. $A = B \iff (A \subset B$ et $B \subset A)$
2. $A \neq B \iff (A \not\subset B$ ou $B \not\subset A)$

Remarque II.3. *La première partie est une méthode très classique pour montrer l'égalité de deux ensembles. En pratique, pour montrer l'égalité de deux ensembles A et B, on montre souvent $A \subset B$ puis $B \subset A$. Cette méthode est appelé méthode de double inclusion.*

II.2 Opération sur les ensembles

II.2.a Définition d'un ensemble par compréhension

De nombreux ensembles sont naturellement construits comme des sous-ensembles. Un exemple concret est, par exemple, l'ensemble des femmes qui est l'ensemble des êtres humains de sexe féminin. Par nature, un tel ensemble est un sous-ensemble d'un ensemble préalable (ici, l'ensemble des êtres humains). Les éléments de ce sous-ensemble sont ensuite caractérisés par une propriété (ici, être de sexe féminin). Lorsqu'un ensemble est défini de cette façon, on dit qu'il est construit par compréhension. La définition suivante formalise cette idée.

Définition II.3. *Soit E un ensemble et P un prédicat sur E.*
On admet que l'ensemble des éléments de E vérifiant la propriété P est bien défini. On le note : $\{x \in E \ / \ P(x)\}$.
Soit y un élément quelconque. On a l'équivalence suivante :

$$y \in \{x \in E \ / \ P(x)\} \iff y \in E \text{ et } P(y)$$

Remarque II.4. *Les accolades $\{\ \}$ désignent un ensemble et la barre oblique / signifie "tel que". L'écriture $\{x \in E \ / \ P(x)\}$ se lira donc : "L'ensemble des x appartenant à E tel que $P(x)$" ou encore "L'ensemble des x appartenant à E vérifiant $P(x)$".*

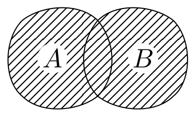
Exemples :

1. $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq 0\}$
2. $[1,2[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ 1 \leq x < 2\}$
3. L'ensemble des entiers naturels pairs est : $\{n \in \mathbb{N} \ / \ 2|n\}$

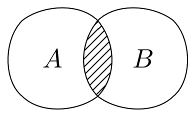
II.2.b Union, intersection...

Définition II.4. *Soient A et B deux ensembles.*

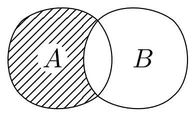
1. *On admet qu'il existe un ensemble appelé union de A et de B noté $A \cup B$ tel que :*
   $\forall x \quad x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ ou } x \in B)$



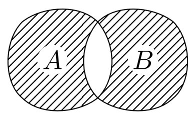
2. *On appelle intersection de A et de B et on note :*
   $A \cap B = \{x \in A \cup B \ / \ x \in A \text{ et } x \in B\}$



3. *L'ensemble A privé de B est l'ensemble :*
   $A \setminus B = \{x \in A \ / \ x \notin B\}$



4. *La différence symétrique de A et de B est l'ensemble :*
   $A \Delta B = \{x \in A \cup B \ / \ x \notin A \text{ ou } x \notin B\}$



Remarque II.5.
1. *Remarquons tout de suite que rien ne nous empêche de faire l'union de deux ensembles quelconques. La nature des éléments de ces deux ensembles est sans importance. On peut mélanger les torchons et les serviettes.*
2. *Remarquons également que l'on a : $\forall x \quad x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B$. Par conséquent, les éléments de $A \cap B$ sont les éléments qui sont à la fois dans A et dans B. La condition d'appartenance à $A \cup B$ est superflue.*

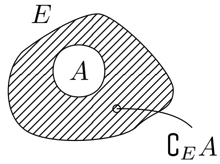
Exemple : On pose $A = [1,3]$ et $B = [2,4]$. On a alors : $A \cup B =$, $A \cap B =$, $A \setminus B =$ et $A \Delta B =$.

Proposition II.3. *Soient A, B et C trois ensembles. On a alors :*

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cap B = B \cap A$
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
5. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
6. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

II.2.c Complémentaire

Définition II.5 (Complémentaire)**.** *Soient E un ensemble et A un sous-ensemble de E (i.e. $A \subset E$).*
Le complémentaire de A dans E est :
$$\complement_E A = \{x \in E \ / \ x \notin A\}$$



Remarque II.6. *Les éléments du complémentaire de A sont donc les éléments de E qui ne sont pas dans A.*

Proposition II.4 (Complémentaire et opérations ensemblistes)**.** *Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.*
On a alors :

1. $\complement_E \left(\complement_E A\right) = A$
2. $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$
3. $\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$

Exemple II.3. *On pose : $A = [1,3]$, $B = [2,4]$ et $E = \mathbb{R}$.*
On a : $\complement_{\mathbb{R}} A =]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$, $\complement_{\mathbb{R}} B =]-\infty, 2[\cup]4, +\infty[$, $A \cup B = [1,4]$.
Donc : $\complement_{\mathbb{R}} (A \cup B) =]-\infty, 1[\cup]4, +\infty[= \left(]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[\right) \cap \left(]-\infty, 2[\cup]4, +\infty[\right)$.

II.2.d Familles d'ensembles

Il nous sera souvent nécessaire de considérer de nombreux ensembles simultanément voire une infinité. Le seul moyen de gérer cette complexité est de les paramétrer par un autre ensemble. Par exemple, les intervalles fermés bornés dont les bornes sont entières sont les intervalles de la forme $[n, n+1]$ où $n \in \mathbb{Z}$. On peut donc les paramétrer à l'aide de l'ensemble $\mathbb{Z}$.

Définition II.6. *Soit I un ensemble.*
On appelle famille d'ensemble d'indice I la donnée pour chaque élément i de I d'un ensemble E_i. On le note alors $(E_i)_{i \in I}$

Exemple :

1. La famille des intervalles dont les bornes sont entières est donc : $([n, n+1])_{n \in \mathbb{Z}}$.
2. Les intervalles fermés et non minorés de $\mathbb{R}$ forme la famille : $(]-\infty, a])_{a \in \mathbb{R}}$.

On introduit alors l'union et l'intersection d'une famille d'ensemble :

Définition II.7. *Soit I un ensemble et $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles d'indice I.*

1. *On a admet qu'il existe un ensemble appelé union des ensembles de la famille $(E_i)_{i \in I}$ noté $\bigcup_{i \in I} E_i$ tel que :*
$$\forall x \quad x \in \bigcup_{i \in I} E_i \iff \exists i \in I \quad x \in E_i$$
2. *L'intersection des ensembles de la familles $(E_i)_{i \in I}$ est l'ensemble :*
$$\bigcap_{i \in I} E_i = \left\{ x \in \bigcup_{i \in I} E_i \ / \ \forall i \in I \quad \in E_i \right\}$$

Exemple II.4.

1. $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1] =$
2. $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1] =$
3. $\bigcup_{a \in \mathbb{R}^-}]-\infty, a] =$
4. $\bigcap_{a \in \mathbb{R}^-}]-\infty, a] =$

II.2.e Produit d'ensembles

Définition II.8. *Un couple est la donnée de manière ordonnée de deux éléments a et b.*
On note le couple a et b : (a, b).

Remarque II.7.

1. *Contrairement aux ensembles, l'ordre des termes d'un couple est signifiant.*
Plus précisément : $(x, y) = (x', y') \iff x = x'$ et $y = y'$. Ainsi, $(x, y) = (y, x) \iff (x = y)$.

2. *Les couples que vous avez rencontrés lors des années précédentes étaient généralement les coordonnées d'un point du plan.*

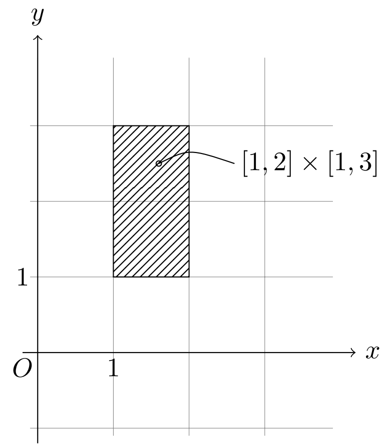
Nous définissons maintenant la notion de produit d'ensembles :

Définition II.9. *Soient A et B deux ensembles.*
On admet que les couples de la forme (a, b)où $a \in A$ et $b \in B$ forment un ensemble noté $A \times B$.
Plus précisément, on a la proposition suivante : $\forall x \quad x \in A \times B \iff \exists a \in A\ \exists b \in B \quad x = (a, b)$

Conventions :

1. On convient que, si A, B et C sont trois ensembles , on a : $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ et on note cet ensemble : $A \times B \times C$. Ses éléments sont appelés des triplets.
2. Soit E un ensemble. On note : $E^2 = E \times E$. Plus généralement, on note : $E^n = \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}}$

Exemple II.5. 1. *$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des couples $(x, y$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.*
2. *$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des triplets (x, y, z) avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$.*
3. *On peut représenter $[1, 2] \times [1, 3]$ par le schéma suivant :*



III Applications

III.1 Définition

La notion d'applications est une généralisation de la notion de fonctions. Nous commençons par la définition formelle d'une application :

Définition III.1 (Applications)**.** *Une application f est la donnée d'un triplet $(E, F, \mathcal{G})$ d'ensembles tel que :*

1. $\mathcal{G} \subset E \times F$
2. $\forall x \in E\ \exists! y \in F \quad (x, y) \in \mathcal{G}$

Vocabulaire :

1. *On dit alors que f est une application de E vers F.*
2. *E est l'ensemble de départ de f ou l'ensemble de définition de f.*
3. *F est l'ensemble d'arrivée de f.*
4. *$\mathcal{G}$ est appelé graphe de f.*
5. *Si $x \in E$, il existe un unique $y \in F$ tel que $(x, y) \in \mathcal{G}$.*
   (a) *y est alors noté $f(x)$.*
   (b) *y est appelé image de x par f.*
   (c) *x est appelé antécédent de y par f.*

   On note également f de la façon suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

Remarque III.1. 1. *Conceptuellement, comme pour les fonctions, on ne confondra pas f avec son graphe ni même avec le triplet $(E, F, \mathcal{G})$ (qui n'est au fond qu'une modélisation de la notion d'application). Une application d'un ensemble E vers un ensemble F est un procédé qui, à un élément x de E, associe un élément $f(x)$ de F.*

2. *On parle de fonction et non d'application lorsque l'espace d'arrivée de f est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (i.e. $F = \mathbb{R}$ ou $F = \mathbb{C}$). Dans ce cas, l'ensemble de départ est souvent éludé ; la fonction est définie à l'aide d'une expression qui caractérise implicitement cet ensemble.*

3. *Un élément y de F n'admet pas toujours d'antécédent. Il peut également en avoir plusieurs voire une infinité. Toutes les situations sont possibles.*

4. *Dans la notation finale de la définition, comme pour les fonctions, on remplace généralement $f(x)$ par une expression caractérisant f.*

Exemple III.1. 1. *On peut définir une fonction de plusieurs manières :*

(a) *En fixant individuellement une valeur pour chacun des éléments de E :*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [\![1, 4[\![& \longrightarrow & \{2, 3, 5, 7\} \\ 1 & \longmapsto & 2 \\ 2 & \longmapsto & 3 \\ 3 & \longmapsto & 2 \\ 4 & \longmapsto & 7 \end{array} \right.$$

Ainsi, on a :

i. $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $f(4) = 7$.

ii. 1 *admet pour image par* f : 2.

iii. 3 *admet pour antécédent par* f : 2.

iv. 2 *admet pour antécédents par* f : 1 *et* 3.

v. 5 *n'admet pas d'antécédent par* f.

(b) *Par une expression :*

– $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array} \right.$

– $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, n) & \longmapsto & \sin(nx) \end{array} \right.$

– $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \sin(xy) \end{array} \right.$

(c) *Par une distinction de cas :*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \quad \textit{si } x \geq 0 \\ x & \longmapsto & -x \ \textit{si } x < 0 \end{array} \right.$$

2. *Dans le cas générale, si $c \in F$, l'application définie sur E constante égale à c est :*

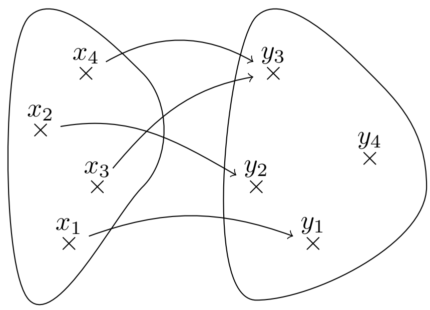
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & c \end{array} \right.$$

3. *Si $F = E$, il existe une application spéciale de E dans E appelé application identité de E définie par :*

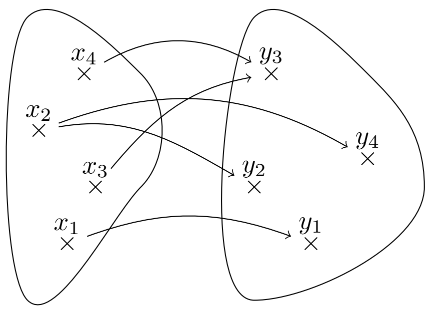
$$\mathrm{Id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$$

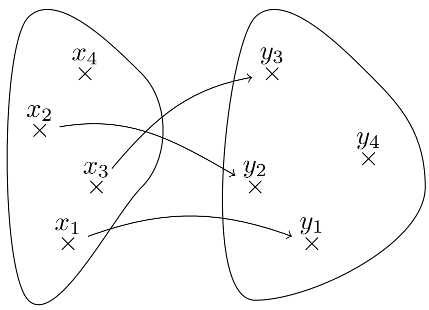
Remarque III.2. 1. *Il est très important de comprendre que les espaces de départ et d'arrivée sont des ensembles quelconques. En particulier, on rencontre aussi bien des exemples mathématiques comme nous l'avons vu précédemment que des exemples concrets. Par exemple, il existe une application définie sur l'ensemble des êtres vivants au 1^{er} septembre 2009 qui, à une personne, associe son âge au 1^{er} septembre 2009.*

2. *On représente souvent des applications à l'aide de diagrammes de la forme suivantes :*



La principale contrainte pour qu'un tel diagramme définisse une application est qu'exactement une flèche parte de chaque élément de l'espace de départ. Par exemple, les diagrammes suivants ne représentent pas une application :





Définition III.2. *Soient E et F deux ensembles.*
On note $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F.

Exemple III.2. *L'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est donc noté $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*

Proposition III.1 (Critère pratique d'égalité d'applications)**.** *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : E' \longrightarrow F'$.*
Les applications f et g sont égales si, et seulement si :

1. $E = E'$
2. $F = F'$
3. $\forall x \in E \quad f(x) = g(x)$

Exemple III.3.

1. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2} \end{array} \right.$ *et* $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array} \right.$

   On a : $f = g$.

2. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2} \end{array} \right.$ *et* $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2} \end{array} \right.$

   On a : $f \neq g$ car elles ont des ensembles d'arrivée distincts.

3. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2} \end{array} \right.$ *et* $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2} \end{array} \right.$

   On a : $f \neq g$ car elles ont des ensembles de départ distincts.

Définition III.3 (Composition d'applications)**.** *Soient E, F et G trois ensembles. Soient $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$. On appelle composée de g par f et on note :*

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array} \right.$$

Proposition III.2 (associativité de $\circ$)**.** *Soient E, F, G et H quatre ensembles. Soient $f \in \mathcal{F}(E, F)$, $g \in \mathcal{F}(F, G)$ et $h \in \mathcal{F}(G, H)$.*
Alors : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
On note : $h \circ g \circ f = h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Définition III.4 (Restriction-prolongement)**.** *Soient E et F deux ensembles. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.*

1. *Soit E' un sous-ensemble de E (i.e. $E' \subset E$).*
   On appelle restriction de f à E' et on note :

$$f_{|E'} : \left\{ \begin{array}{ccc} E' & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

2. *Soient E' tel que $E \subset E'$ et $g \in \mathcal{F}(E', F)$. On dit que g est un prolongement de f si $g_{|E} = f$.*

Remarque III.3. 1. *A priori un prolongement n'a aucune propriété particulière ; si l'application prolongée a une propriété, son prolongement ne l'a pas nécessairement.*

2. *On peut également restreindre ou prolonger le domaine d'arrivée d'une application f. Cependant, dans le cas d'une restriction, si le nouveau domaine d'arrivée est F', on s'assurera que l'application f est à valeurs dans F'.*

Exemple III.4. *On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \dfrac{1}{x}$.*
On peut restreindre f à $\mathbb{R}^{+*}$. On obtient l'application :

$$f_{|\mathbb{R}^{+*}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$$

On peut prolonger f sur $\mathbb{R}$ en l'application :

$$g : \left\{ \begin{array}{cccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \longmapsto & 0 & \end{array} \right.$$

Remarquons que, comme f, l'application g est impaire. C'est d'ailleurs la seule façon de prolonger f en une fonction impaire. Il n'y a aucune raison qu'un prolongement de f soit impair. Considérons l'application suivante :

$$h : \left\{ \begin{array}{cccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \longmapsto & 1 & \end{array} \right.$$

L'application h est un prolongement de f mais n'est pas impair.
On peut également restreindre le domaine d'arrivée à $\mathbb{R}^*$. On obtient l'application :

$$j : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$$

On ne peut cependant restreindre plus le domaine d'arrivée car tous les nombres de $\mathbb{R}^*$ admette un antécédent par f.

III.2 Image directe et réciproque d'une partie

Dans toute la suite, E et F désignent deux ensembles et f une application de E dans F.

III.2.a Image directe

Définition III.5 (Image directe)**.** *Soit $A \subset E$.*
On appelle image directe de A par f l'ensemble :

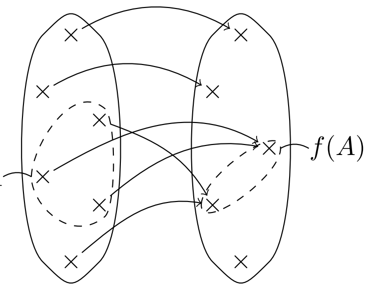
$$f(A) = \{y \in F \ / \ \exists x \in A \quad y = f(x)\}$$

Remarque III.4. 1. *La notation $f(A)$ est ambigüe. Elle n'est pas une évaluation de l'application f*

2. *On note souvent $f(A) = \{f(x) \ / \ x \in A\}$ en remplaçant $f(x)$ par son expression.*

Exemples :

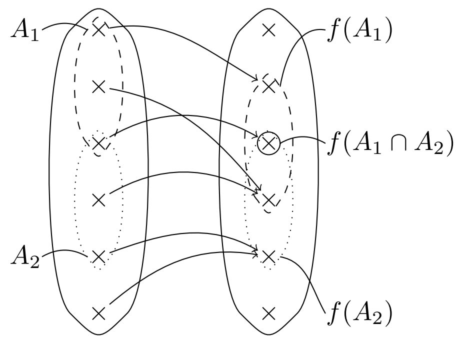
1. A l'aide d'un diagramme, on peut mieux visualiser la notion d'image directe :



2. On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$. On a alors : $f(\mathbb{R}^+) =$, $f([0,2[) =$, $f(]-2,3]) =$.
3. Quelle que soit l'application f, on a : $f(\emptyset) =$.

Proposition III.3. *Soient A_1 et A_2 deux sous-ensemble de E.*
On a les propriétés suivantes :

1. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
2. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$



III.2.b Image réciproque

Définition III.6 (image réciproque)**.** *Soit $B \subset F$.*
On appelle image réciproque de B par f l'ensemble

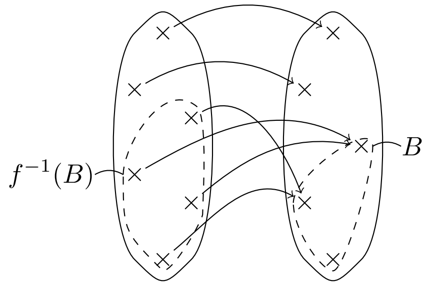
$$f^{-1}(B) = \{x \in E \ / \ f(x) \in B\}$$

Remarque III.5. *1. Par définition, $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des antécédents des éléments de B. En particulier, l'ensemble des antécédents de y est $f^{-1}(\{y\})$.*

2. La notation $f^{-1}(B)$ ne désigne pas une évaluation de l'application réciproque de f définie dans la section III.3.c. De même, en général, on n'a pas : $f(f^{-1}(B)) = B$ ni $f^{-1}(f(B)) = B$.

Exemple :

1. Le diagramme suivant illustre la notion d'image réciproque :



Remarquons que : $f(f^{-1}(B)) \neq B$. De même, en reprenant l'exemple pour l'image directe, on avait : $f^{-1}(f(A)) \neq A$.

2. On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$. On a alors : $f^{-1}([0,1]) =$, $f^{-1}([-3,-2[) =$, $f^{-1}(]-1,3]) =$.
3. Quelle que soit l'application f, on a : $f^{-1}(\emptyset) =$.

Proposition III.4. *Soient B, B_1 et B_2 trois sous-ensembles de f.*
On a alors :

1. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
2. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
3. $f^{-1}(\complement_F B) = \complement_E(f^{-1}(B)$

III.3 Injection, surjection,bijection

f désigne toujours une application entre deux ensembles E et F.

III.3.a Injection

Définition III.7 (Injection). *L'application f est dite injective si :*

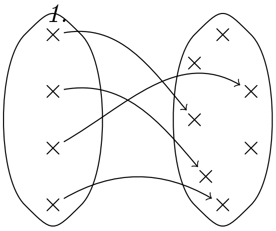
$$\forall (x_1, x_2) \in E^2 \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

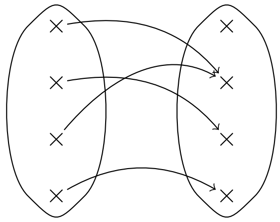
On dit également que f est une injection de E dans F.

Proposition III.5. *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *f est injective.*
2. *L'équation $y = f(x)$ admet au plus une solution quel que soit $y \in F$.*
3. *Tout élément de F admet au plus un antécédent.*
4. *Quel que soit $y \in F$ l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ admet au plus un élément.*

Exemple III.5. *1.*


(injective)


(non injective)

2. *La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ n'est pas injective. En effet, on a : $f(1) = f(-1)$. Par contre, $f_{|\mathbb{R}^+}$ est injective.*
3. *Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$.*
   La fonction f est injective si, et seulement si, n est impair.

Proposition III.6 (Composée d'injections). *Soit G un ensemble et $g \in \mathcal{F}(F, G)$.*
On suppose que f et g sont injectives.
Alors, $g \circ f$ est injective.

III.3.b Surjection

Définition III.8 (Surjection). *L'application f est dite surjective si :*

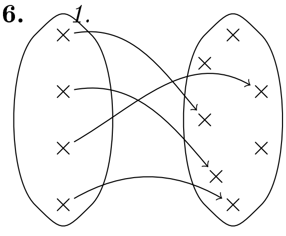
$$\forall y \in F \ \exists x \in E \quad f(x) = y$$

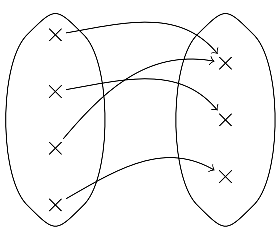
On dit également que f est une surjection de E dans F.

Proposition III.7. *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *f est surjective.*
2. *L'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution quel que soit $y \in F$.*
3. *Tout élément de F admet au moins un antécédent.*
4. *Quel que soit $y \in F$ l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ admet au moins un élément.*
5. *$f(E) = F$*

Exemple III.6. *1.*


(non surjective)


(surjective)

2. *La fonction f définie par $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ n'est pas surjective. En effet, on a : $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$.*
3. *La fonction f définie par $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ est surjective. En effet, on a : $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$.*

4. *Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction f définie $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right.$ La fonction f est surjective si, et seulement si, n est impair.*

Proposition III.8 (Composée de surjections)**.** *Soit G un ensemble et $g \in \mathcal{F}(F, G)$.*
On suppose que f et g sont surjectives.
Alors, $g \circ f$ est surjective.

III.3.c Bijection

Définition III.9 (Bijection)**.** *L'application f est bijective si :*

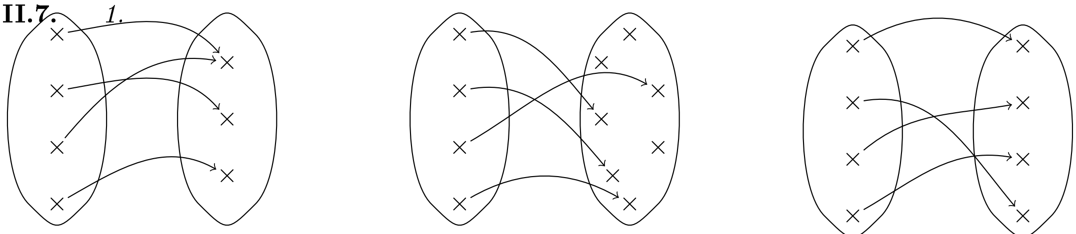
$$\forall y \in F\ \exists! x \in E \quad f(x) = y$$

On dit alors que f est une bijection de E dans F.

Proposition III.9 (Caractérisation et interprétation de la bijectivité)**.** *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *f est bijective.*
2. *L'équation $y = f(x)$ admet exactement une solution quel que soit $y \in F$.*
3. *Tout élément de F admet exactement un antécédent.*
4. *Quel que soit $y \in F$ l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ admet exactement un élément.*
5. *f est injective et surjective.*

Exemple III.7. 1.



(surjective, non injective) *(injective, non surjective)* *(bijective)*

2. *La fonction f définie par $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ est bijective.*
3. *Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction f définie $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right.$ La fonction f est bijective si, et seulement si, n est impair.*

Définition III.10 (Bijection réciproque)**.** *On suppose que f est une bijection.*
L'application qui, à $y \in F$, associe son unique antécédent par f est appelé application réciproque de f. On la note f^{-1}. Elle est définie sur F et à valeurs dans E.

Remarque III.6.

1. *Si $B \subset F$ et f est une bijection, alors $f^{-1}(B)$ désigne à la fois l'image réciproque de B par f et l'image directe de B par f^{-1}. Ces ensembles sont égaux (exercice). Cette notation n'est donc pas ambiguë. Cependant, on ne confondra pas l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(F) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ B & \longmapsto & f^{-1}(B) \end{array} \right.$ souvent noté f^{-1} et la réciproque de f. On notera en particulier qu'elles n'ont pas le même domaine de définition. De plus, on remarquera que la première application est toujours définie tandis que l'existence de la seconde est conditionnée par la bijectivité de f.*
2. *On a : $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ (exercice). Le théorème suivant nous assure que cette propriété caractérise f^{-1}.*

Théorème III.1 (Caractérisation par composition)**.** *Soit G un ensemble et $g \in \mathcal{F}(F, G)$.*
On suppose : $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
Alors :

1. *f et g sont bijectives.*
2. *$g = f^{-1}$.*

Corollaire III.1 (Bijectivité de la réciproque)**.** *On suppose que f est une bijection.*
L'application f^{-1} est bijective et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Corollaire III.2 (Composée de deux bijections). *Soit G un ensemble et $g \in \mathcal{F}(F,G)$.*
On suppose que f et g sont des bijections.
Alors, $g \circ f$ est une bijection et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

IV Relations d'ordre

IV.1 Relations binaires

Définition IV.1 (Relation binaire). *Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est la donnée d'un sous-ensemble $\mathcal{G}$ de $E \times E$.*
Si $(x,y) \in \mathcal{G}$, on note alors : $x\mathcal{R}y$.

Exemples :

1. Les relations usuelles $\leq$, $=$, $\geq$, $<$ et $>$ sont des exemples de relations binaires sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$.
2. On peut définir une relation $\leq$ sur l'ensemble des fonctions définies sur $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ où I est un intervalle en posant :
$$\forall (f,g) \in \big(\mathcal{F}(I,\mathbb{R})\big)^2 \quad f \leq g \iff (\forall x \in I \quad f(x) \leq g(x))$$
3. Cette définition s'applique à des exemples concrets. Fixons un ensemble E de personnes. On peut définir sur E des relations binaires comme "être descendant de...", "être plus âgé que...",...

Pour pouvoir étudier la notion de relation binaire, nous introduisons les notions suivantes :

Définition IV.2. *Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E.*

1. *On dit que $\mathcal{R}$ est réflexive si : $\forall x \in E \quad x\mathcal{R}x$.*
2. *On dit que $\mathcal{R}$ est transitive si : $\forall (x,y,z) \in E^3 \quad \big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z\big) \implies x\mathcal{R}z$.*
3. *On dit que $\mathcal{R}$ est symétrique si : $\forall (x,y) \in E^2 \quad x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$.*
4. *On dit que $\mathcal{R}$ est antisymétrique si : $\forall (x,y) \in E^2 \quad \big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x\big) \implies x = y$.*
5. *On dit que $\mathcal{R}$ est totale si : $\forall (x,y) \in E^2 \quad x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x$.*

Exemple IV.1.
1. *Sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$:*
   (a) *$\leq$ et $\geq$ sont réflexives, transitives, antisymétriques et totales.*
   (b) *$<$ et $>$ sont transitives, antisymétriques.*
   (c) *$=$ est réflexive, transitive, symétrique, antisymétrique.*
2. *Sur $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, la relation $\leq$ est réflexive, transitive, antisymétrique mais pas totale.*
3. *Sur un ensemble E de personnes, "être descendant de.." est transitive, antisymétrique. Les caractères symétrique et total dépendent du choix de E. Elle n'est pas réflexive sauf si E est vide.*

Nous définissons deux types de relations binaires particulières :

Définition IV.3. *Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E.*

1. *La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre si elle est symétrique, transitive et antisymétrique. On dit que $(E,\mathcal{R})$ est un ensemble ordonné.*
2. *La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si elle est symétrique, transitive et symétrique.*

Remarque IV.1. *La notion de relation d'ordre a été introduite pour modéliser une relation de type $\leq$. Cependant, la relation usuelle $\leq$ est totale. C'est une propriété qui n'est pas vérifiée par toutes les relations d'ordre. Si elle est vérifiée, on parle de relation d'ordre totale.*

Exemple IV.2.
1. *Sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$:*
   (a) *$\leq$ et $\geq$ sont des relations d'ordre totale sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ mais pas des relations d'équivalence.*
   (b) *$<$ et $>$ ne sont ni des relations d'ordre ni des relations d'équivalence.*
   (c) *$=$ est une relation d'ordre et une relation d'équivalence.*
2. *La relation $\leq$ sur $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ est une relation d'ordre mais n'est pas totale.*
3. *Sur un ensemble E de personnes, "être descendant de.." n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas réflexive. Cependant, en élargissant la notion en acceptant qu'une personne est son propre descendant, la relation devient une relation d'ordre.*
4. *Sur un ensemble E de personnes, "avoir le même âge que..." est une relation d'équivalence.*
5. *Soit E un ensemble. La relation $\subset$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.*

IV.2 Majorant, minorant

Définition IV.4. *Soient $\preceq$ un relation d'ordre sur un ensemble E et $A \subset E$.*

1. *On dit que $M \in E$ est un majorant de A si : $\forall x \in A \quad x \preceq M$.*
2. *L'ensemble A est dit majoré si A admet au moins un majorant ; i.e. $\exists M \in E \ \forall x \in A \quad x \preceq M$.*
3. *On dit que $m \in E$ est un minorant de A si : $\forall x \in A \quad m \preceq x$.*
4. *L'ensemble A est dit minoré si A admet au moins un minorant ; i.e. $\exists m \in E \ \forall x \in A \quad m \preceq x$.*
5. *L'ensemble A est borné s'il est, à la fois, majoré et minoré.*

Remarque IV.2. *$\preceq$ désigne une relation d'ordre quelconque. Elle peut être différente de $\leq$.*

Exemple IV.3.
1. *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$. Alors, les intervalles $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ et $]a,b[$ sont majorés par b et minoré par a (mais aussi par $b+1$ et $a+1$) pour $\leq$.*
2. *$]-\infty, a]$ est majoré par a mais n'est pas minoré pour $\leq$.*
3. *$\mathcal{P}(E)$ est minoré par $\emptyset$ et par E pour $\subset$.*

Remarque IV.3. *Grâce à la notion de relation d'ordre, nous pouvons donc définir les notions de majorants, de minorants, d'ensembles majorés, d'ensembles minorées. Remarquons cependant que ces notions dépendent fortement de la relation d'ordre. Par exemple, $[a,+\infty[$ est minoré par a mais n'est pas majoré pour la relation d'ordre $\leq$. Inversement, pour la relation d'ordre $\geq$, $[a,+\infty[$ est majoré par a mais n'est pas minoré.*

IV.3 Maximum, minimum

Définition IV.5. *Soient $\preceq$ un relation d'ordre sur un ensemble E et $A \subset E$.*

1. *A admet un maximum s'il existe un majorant M de A qui appartient à A ; i.e. $\exists M \in A \quad \forall x \in A \quad x \preceq M$. M est appelé maximum de A et on note : $M = \max(A)$.*
2. *A admet un minimum s'il existe un minorant m de A qui appartient à A ; i.e. $\exists m \in A \quad \forall x \in A \quad m \preceq x$. m est appelé minimum de A et on note : $m = \min(A)$.*

Proposition IV.1. *S'il existe, un maximum (respectivement un minimum) est unique.*

Exemple IV.4.
1. *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$.*
   (a) *$]a,b]$ et $[a,b]$ admettent pour maximum b : $\max(]a,b]) = \max([a,b]) = b$.*
   (b) *$[a,b[$ et $]a,b[$ n'admettent pas de maximum.*
2. *On prend $E = \{1,2,3,4\}$. On travaille sur $\mathcal{P}(E)$ avec la relation d'ordre $\subset$.*
   (a) *On pose : $A = \big\{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}\big\}$.*
   On a alors : $\max(A) = \{1,2,3\}$ et $\min(A) = \{1\}$.
   (b) *On pose : $A = \big\{\{1,2\},\{3,4\}\big\}$.*
   A n'admet ni de maximum ni de minimum.