Formulaire sur les nombres complexes

Formule fondamentale :

$$\mathrm{i}^2 = -1 \qquad \frac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$$

Puissance de i :

$\mathrm{i}^{4k} = 1$	$\mathrm{i}^{4k+1} = \mathrm{i}$
$\mathrm{i}^{4k+2} = -1$	$\mathrm{i}^{4k+3} = -\mathrm{i}$

$k \in \mathbb{Z}$

Module d'un nombre complexe :

Si $z = a + \mathrm{i}b$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, alors $\lvert z\rvert = \sqrt{a^2+b^2} \geq 0$	$\lvert z\rvert \geq 0$ $\lvert z\rvert = OM$	$z = 0 \iff \lvert z\rvert = 0$ $\lvert z\rvert^2 = z.\bar{z}$
$\begin{cases} \lvert\mathrm{Re}(z)\rvert \leq \lvert z\rvert \\ \lvert\mathrm{Im}(z)\rvert \leq \lvert z\rvert \end{cases}$	$\lvert\bar{z}\rvert = \lvert z\rvert$	$\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{\lvert z\rvert^2}$
$\lvert z.z'\rvert = \lvert z\rvert.\lvert z'\rvert$	$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n,\ n \in \mathbb{Z}$	$\lvert z+z'\rvert \leq \lvert z\rvert + \lvert z'\rvert$

Calculs élémentaires :

$$(a_1 + \mathrm{i}b_1) + (a_2 + \mathrm{i}b_2) = (a_1 + a_2) + \mathrm{i}(b_1 + b_2)$$
$$(a_1 + \mathrm{i}b_1).(a_2 + \mathrm{i}b_2) = (a_1.a_2 - b_1.b_2) + \mathrm{i}(a_1.b_2 + b_1.a_2)$$
$$(a + \mathrm{i}b).(a - \mathrm{i}b) = a^2 + b^2$$
$$(a + \mathrm{i}b)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \mathrm{i}\frac{b}{a^2+b^2} = \frac{1}{a^2+b^2}(a - \mathrm{i}b)$$
$$z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + \mathrm{i}z_2)(z_1 - \mathrm{i}z_2)$$

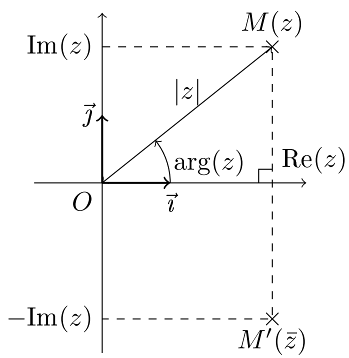
Parties réelle et imaginaire :

$$z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\mathrm{Im}(z)$$
$$z = z' \iff \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \text{ et } \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$$

$\mathrm{Re}(z+z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$	$\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda\mathrm{Re}(z)$	$\lambda \in \mathbb{R}$
$\mathrm{Im}(z+z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$	$\mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda\mathrm{Im}(z)$	$\lambda \in \mathbb{R}$
$\mathrm{Re}(\mathrm{i}z) = -\mathrm{Im}(z)$	$\mathrm{Im}(\mathrm{i}z) = \mathrm{Re}(z)$	

Conjugaison :

$\bar{\bar{z}} = z$	$\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
$\overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z'}$	$\overline{z^n} = \bar{z}^n$
$\overline{\lambda z} = \lambda\bar{z},\ \lambda \in \mathbb{R}$	$\overline{\mathrm{i}z} = -\mathrm{i}\bar{z}$
$\mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2}(z+\bar{z})$	$\mathrm{Im}(z) = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$



Caractérisation nombres réels et imaginaires purs :

$$z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0 \iff z = \bar{z}$$
$$z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}(z) = 0 \iff z = -\bar{z}$$

Nombre complexe de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ /\ \lvert z\rvert = 1\}$$
$$\forall z \in \mathbb{U} \quad z^{-1} = \bar{z} \in \mathbb{U}$$
$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad z \in \mathbb{U} \iff z^{-1} = \bar{z}$$

Argument d'un nombre complexe :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$$
$$\arg(z^{-1}) = \arg(\bar{z}) = -\arg(z)$$
$$\arg(z^n) = n\arg(z)$$

Exponentielle complexe :

$\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$	$\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z'}$
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} = e^{\mathrm{i}\theta}e^{\mathrm{i}\theta'}$	$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^{-1} = \overline{e^{\mathrm{i}\theta}} = e^{-\mathrm{i}\theta}$
$\cos(\theta) = \dfrac{e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta}}{2}$	$\sin(\theta) = \dfrac{e^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n$	$\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^n$
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} \iff \theta = \theta'[2\pi]$	
$\lvert\mathrm{e}^z\rvert = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}$	$\overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\bar{z}}$

Équation du second degré

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (E)$$

On pose : $\Delta = b^2 - 4ac$.Soit $\delta \in \mathbb{C}$ tel que : $\delta^2 = \Delta$

Si $\Delta = 0$, alors l'ensemble des solutions de (E) est $\{-\dfrac{b}{2a}\}$ (racine double)

Si $\Delta \neq 0$, alors l'ensemble des solutions de (E) est $\{\dfrac{-b+\delta}{2a}, \dfrac{-b-\delta}{2a}\}$ (racine simple)

$$az^2 + bz + c = a\left(z - \frac{-b+\delta}{2a}\right)\left(z - \frac{-b-\delta}{2a}\right)$$

z_1 et z_2 sont les solutions de (E) si, et seulement si,

1) $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ 2) $z_1z_2 = \dfrac{c}{a}$

Racine $n^{\text{ème}}$

$$\begin{aligned}
z^n = 1 &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad z = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}} \\
&\iff \exists k \in \{0, \ldots, n-1\} \quad z = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}
\end{aligned}$$

Si $z_0^n = \omega$, alors :

$$\begin{aligned}
z^n = \omega &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad z = z_0\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}} \\
&\iff \exists k \in \{0, \ldots, n-1\} \quad z = z_0\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}
\end{aligned}$$

Si $\omega = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, alors :

$$\begin{aligned}
z^n = \omega &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad z = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}} \\
&\iff \exists k \in \{0, \ldots, n-1\} \quad z = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}
\end{aligned}$$

Géométrie :

Barycentre :

Soient $A_1(a_1), \ldots, A_n(a_n)$ n points.

Soient $(\alpha_k)_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$ tel que : $\displaystyle\sum_{k=1}^n \alpha_k \neq 0$.

On note z_0 l'affixe du barycentre de (A_1, α_1), …, (A_n, α_n).

Alors : $z_0 = \dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^n \alpha_k a_k}{\displaystyle\sum_{k=1}^n \alpha_k}$

Soient $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$.

Soient $\overrightarrow{v}(z)$ et $\overrightarrow{v'}(z')$.

Distances :

$\|\overrightarrow{v}\| = |z|$

$AB = |b-a|$

Angles :

$(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'}) = \arg\left(\dfrac{z'}{z}\right)[2\pi]$

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$

$\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\dfrac{z'}{z} \in \mathbb{R}$

$\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\dfrac{z'}{z} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$

Similitude

Soient $\overrightarrow{v}(z_0)$, $\Omega(\omega)$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Représentation complexe :

Translation de vecteur $\overrightarrow{v}$: $z' = z + z_0$

Rotation de centre Ω et d'angle θ : $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-\omega)+\omega$

Homotétie de centre Ω et de rapport λ : $z' = \lambda(z-\omega)+\omega$

Similitude directe :

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Soit F la similitude directe de représentation complexe :

$$z' = az + b$$

1) Si $a = 1$, alors F la translation de vecteur d'affixe b.
2) Si $a \neq 1$, alors F est la similitude de centre $\Omega(\omega)$, d'angle θ et de rapport λ avec $\omega = a\omega + b$, $\theta = \arg(a)[2\pi]$ et $\lambda = |a|$.
De plus, la similitude F est la composée de la rotation d'angle θ et de l'homothétie de rapport λ de centre Ω.