Formulaire sur les développements limités

1 Règles de calculs

Combinaison linéaire :

Si $\begin{cases} f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) \\ g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) \end{cases}$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$,

alors : $\lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda a_0 + \mu b_0) + (\lambda a_1 + \mu b_1)x + \cdots + (\lambda a_n + \mu b_n)x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$.

Produit :

Si $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$

$= P(x) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$

et $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$

$= Q(x) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$

alors : $f(x)g(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \cdots + \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{i-n}\right) x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$.

$= P(x)Q(x) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$ (on tronque à l'ordre n)

Généralisation : Si $f(x) = x^p P(x) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{n+p}\right)$ et $g(x) = x^q Q(x) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{n+q}\right)$

alors : $f(x)g(x) = x^{p+q} P(x)Q(x) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{n+p+q}\right)$.

Composition :

Si $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$

$= P(x) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$

et $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$ avec $\underline{b_0 = 0}$

$= Q(x) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$

alors : $f(g(x)) = P(Q(x)) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$ (on tronque à l'ordre n).

Fraction :

Si $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$ avec $a_0 \neq 0$,

alors : $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{a_0} \dfrac{1}{1 + \frac{a_1}{a_0}x + \cdots + \frac{a_n}{a_0}x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)}$

$= \dfrac{1}{a_0}\dfrac{1}{1+u}$ avec $u = \dfrac{a_1}{a_0}x + \cdots + \dfrac{a_n}{a_0}x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$.

Cas général : $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x)\dfrac{1}{g(x)}$

Puissance :

Si $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$ avec $a_0 > 0$,

alors : $f^\alpha(x) = a_0^\alpha \left(1 + \dfrac{a_1}{a_0}x + \cdots + \dfrac{a_n}{a_0}x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)\right)^\alpha$

$= a_0^\alpha (1+u)^\alpha$ avec $u = \dfrac{a_1}{a_0}x + \cdots + \dfrac{a_n}{a_0}x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$.

Intégration :

Si f est continue au voisinage de 0 telle que $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$

et F une primitive de f,

alors : $F(x) = F(0) + a_0 x + \dfrac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{n+1}\right)$

(on intègre terme à terme)

2 Propriétés usuelles

Principe de troncature :

Si $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$ et $\underline{m \leq n}$,

alors : $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^m)$

Equivalence au premier terme non nul :

Si $f(x) = a_m x^m + a_{m+1} x + \cdots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$ avec $a_m \neq 0$,

alors : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_m x^m$

Caractérisation de la continuité

f est continue en a si, et seulement si, $f(x) = f(a) + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(1)$

Caractérisation de la dérivabilité

f est dérivable en a si, et seulement si, $\exists \alpha \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(a) + \alpha(x-a) + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(x-a)$.

Dans ces conditions, $f'(a) = \alpha$.

Théorème de Taylor-Young :

Soit f de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ au voisinage de a et dérivable n fois en a.

Alors : $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}((x-a)^n)$

$= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}((x-a)^n)$

3 Développements limités usuels

Formules fondamentales :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}\left(x^n\right)\\
\mathrm{ch}(x) &= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+1}\right)\\
\mathrm{sh}(x) &= x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+2}\right)\\
\mathrm{th}(x) &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}\left(x^8\right)\\
\cos(x) &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n.\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+1}\right)\\
\sin(x) &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+2}\right)\\
\tan(x) &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}\left(x^8\right)\\
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots\\
&\quad+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}\left(x^n\right)\\
\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}\left(x^n\right)\\
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}\left(x^n\right)\\
\ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t\\
&= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}.\frac{x^n}{n}+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}\left(x^n\right)\\
\ln(1-x) &= -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\cdots-\frac{x^n}{n}+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}\left(x^n\right)
\end{aligned}
$$

Formules complémentaires :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Argth}(x) &= \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t\\
&= x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+2}\right)\\
\arctan(x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\
&= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+2}\right)\\
\sqrt{1+x} &= (1+x)^{\frac12}\\
&= 1+\frac{x}{2}-\frac{1}{8}x^2+\cdots\\
&\quad+(-1)^{n-1}.\frac{1.1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n n!}x^n+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}\left(x^n\right)\\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= (1+x)^{-\frac12}\\
&= 1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2+\cdots+(-1)^n.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}x^n+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}\left(x^n\right)\\
\mathrm{Argsh}(x) &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t\\
&= x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{3}{8}\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+2}\right)\\
\arcsin(x) &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t\\
&= x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{3}{8}\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+2}\right)
\end{aligned}
$$