Formulaire de Géométrie élémentaire du plan

$\mathcal{P}$ désigne un plan ($\mathcal{P} \simeq \mathbb{R}^2$).

Colinéarité

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires $\iff \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \quad \lambda\vec{u}+\mu\vec{v}=\vec{0} \implies \lambda=\mu=0$ *Dans ces conditions, on dit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont libres.*
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\iff \exists\lambda\in\mathbb{R} \quad \vec{u}=\lambda\vec{v}$ ou $\vec{v}=\lambda\vec{u}$ $\iff \exists\lambda\in\mathbb{R} \quad \vec{u}=\lambda\vec{v}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$

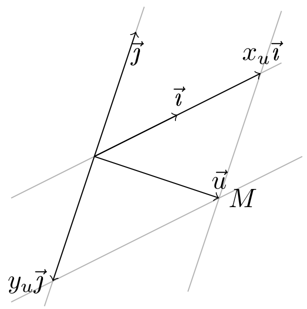
Bases et repères

On appelle base du plan $\mathcal{P}$ tout couple $\mathcal{B}=(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ tels que $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ soient non colinéaires.
On appelle repère du plan $\mathcal{P}$ tout triplet $\mathcal{R}=(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ tels que $O\in\mathcal{P}$ et $\mathcal{B}=(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ soit une base de $\mathcal{P}$.   *O est appelé l'origine du repère O*
Si, de plus, $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux, on dit que le repère $\mathcal{R}$ est orthogonal.
Si, de plus, $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont de norme 1, on dit que le repère $\mathcal{R}$ est orthonormal.   *Dans ces conditions, on dit que $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont unitaires ou normés.*
Si, de plus, $(\vec{\imath},\vec{\jmath})=\frac{\pi}{2}[2\pi]$, on dit que le repère est orthonormal direct.   Si, dans le cas contraire, $(\vec{\imath},\vec{\jmath})=-\frac{\pi}{2}[2\pi]$, on dit que le repère est orthonormal indirect.

Dorénavant, le plan est rapporté par un repère $\mathcal{R}=(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Soit $M\in\mathcal{P}$ et $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{P}$.

Coordonnées

Il existe un unique couple $(x_u,y_u)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\vec{u}=x_u\vec{\imath}+y_u\vec{\jmath}$.   Ce couple est appelé coordonnées de $\vec{u}$ dans le repère $\mathcal{R}$.   *Si une ambiguïté est possible, on note parfois : $(\overrightarrow{u})_{\mathcal{R}}=(x_u,y_u)$.*
Les coordonnées de M sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$.   *De même, on note parfois : $(M)_{\mathcal{R}}$ ces coordonnées.*



Soient $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$, $C(x_C,y_C)$, $\vec{u}(x_u,y_u)$, $\vec{v}(x_v,y_v)$, $\vec{w}(x_w,y_w)$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Propriétés fondamentales

$\overrightarrow{OA}=x_A\vec{\imath}+y_A\vec{\jmath}$ $A=B \iff (x_A=x_B$ et $y_A=y_B)$	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\iff x_uy_v-y_ux_v=0$ $\vec{u}=\vec{v} \iff (x_u=x_v$ et $y_u=y_v)$

Opérations élémentaires

$\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A)$ $(\vec{u}-\vec{v})(x_u-x_v,y_u-y_v)$	$(\vec{u}+\vec{v})(x_u+x_v,y_u+y_v)$ $(\lambda\vec{u})(\lambda x_u,\lambda y_u)$
$(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})(\lambda x_u+\mu x_v,\lambda y_u+\mu y_v)$	

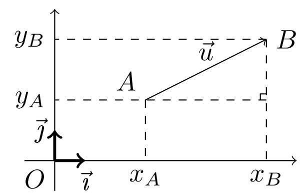
Barycentre

Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées : $I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$
Le centre de gravité G du triangle ABC a pour coordonnées : $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_c}{3}\right)$
Soit $(A_i)_{i=1}^n$ n points de coordonnées respectives $\big((x_i,y_i)\big)_{i=1}^n$.   Soit $(\lambda_i)_{i=1}^n\in\mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n\lambda_i\neq0$.   Le barycentre G de $(A_i,\lambda_i)_{i=1}^n$ a pour coordonnées : $G\left(\frac{\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i}{\sum_{i=1}^n\lambda_i},\frac{\sum_{i=1}^n\lambda_iy_i}{\sum_{i=1}^n\lambda_i}\right)$

Distance et norme

Le repère est supposé orthonormal.

$\Vert\vec{u}\Vert=\sqrt{x_u^2+y_u^2}$ $AB=\Vert\overrightarrow{AB}\Vert=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$



Angles orientés

On suppose que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non nuls.

$(\vec{u},\vec{v})=(\vec{u},\vec{w})+(\vec{w},\vec{v})[2\pi]$ $(\vec{v},\vec{u})=-(\vec{u},\vec{v})$ Si $\lambda>0$, alors $(\lambda\vec{u},\vec{v})=(\vec{u},\lambda\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})[2\pi]$ Si $\lambda<0$, alors $(\lambda\vec{u},\vec{v})=(\vec{u},\lambda\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi[2\pi]$

Théorème d'Al-Kashi

Soit ABC un triangle.   Alors : $BC^2=AB^2+AC^2-2.AB.AC.\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

Produit scalaire

On suppose que le repère est orthonormé direct.

$\vec{u}.\vec{v} = \begin{cases} \|u\|.\|v\|\cos(\vec{u},\vec{v}) & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = x_u x_v + y_u y_v$	
$\vec{u}.\vec{v} = 0 \iff$ les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.	
$\vec{v}.\vec{u} = \vec{u}.\vec{v}$	$(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}).\vec{w} = \lambda\vec{u}.\vec{w} + \mu\vec{v}.\vec{w}$
$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$	$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$
$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$	$\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})$

Déterminant géométrique

On suppose que le repère est orthonormé direct.

$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{cases} \|u\|.\|v\|\sin(\vec{u},\vec{v}) & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = x_u y_v - y_u x_v$	
$\det(\vec{u},\vec{v}) = 0 \iff$ les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.	
$\det(\vec{v},\vec{u}) = -\det(\vec{u},\vec{v})$	$\det(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v},\vec{w}) = \lambda\det(\vec{u},\vec{w}) + \mu\det(\vec{v},\vec{w})$

Droite

Soit $M(x,y)$.

La droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ a pour équation : $\det(\overrightarrow{AM},\vec{u}) = \begin{vmatrix} x-x_A & x_u \\ y-y_A & y_u \end{vmatrix} = (x-x_A)y_u - (y-y_A)x_u = 0$
La droite passant par A et orthogonal au vecteur directeur $\vec{v}$ a pour équation : $\overrightarrow{AM}.\vec{v} = (x-x_A)x_v + (y-y_A)y_v = 0$
La droite de pente $p \in \mathbb{R}$ passant par A a pour équation réduite : $y = p(x-x_A) + y_A$
La droite (AB) a pour équation réduite : $y = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A) + y_A = y_A\frac{x-x_B}{x_A-x_B} + y_B\frac{x-x_A}{x_B-x_A}$
La droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est paramétrée par : $\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ t & \longmapsto & (x_A + tx_u, y_A + ty_u) \end{cases}$
La droite (AB) est paramétrée par : $\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ t & \longmapsto & ((1-t)x_A + tx_B, (1-t)y_A + ty_B) \end{cases}$

Distance à une droite

La distance entre M et la droite $\mathcal{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est : $d(M,\mathcal{D}) = \frac{\lvert\det(\overrightarrow{AM},\vec{u})\rvert}{\|\vec{u}\|}$
La distance entre M et la droite $\mathcal{D}$ passant par A et orthogonale à $\vec{v}$ est : $d(M,\mathcal{D}) = \frac{\lvert\overrightarrow{AM},\vec{v}\rvert}{\|\vec{v}\|}$
La distance entre M et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $ax+by+c=0$ est : $d(M,\mathcal{D}) = \frac{\lvert ax+by+c\rvert}{\|\sqrt{a^2+b^2}\|}$ *L'équation est dite normalisée si* $a^2+b^2=1$.

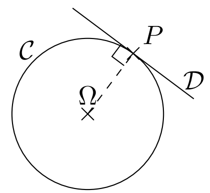
Cercle

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon $R>0$ et $\mathcal{D}$ une droite.

Le cercle $\mathcal{C}$ admet pour équation : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$
Le cercle $\mathcal{C}$ est paramétré par : $\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ t & \longmapsto & (a + R\cos(t), b + R\sin(t)) \end{cases}$
Le cercle $\mathcal{C}$ privé de $P(a-R,b)$ est paramétré par : $\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ t & \longmapsto & (a + R\frac{1-t^2}{1+t^2}, b + R\frac{2t}{1+t^2}) \end{cases}$

Tangente à un cercle

Une droite est tangente au cercle $\mathcal{C}$ si : $d(\Omega,\mathcal{D}) = R$ Dans ces conditions, si H est le projeté de Ω sur $\mathcal{D}$, on dit que $\mathcal{D}$ est tangente à $\mathcal{C}$ en H.
Soit $P \in \mathcal{C}$. La droite est tangente à $\mathcal{C}$ en P $\iff$ $\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = \{P\}$ $\iff$ P est le projeté de Ω sur $\mathcal{D}$



Intersection d'une droite et d'un cercle

Si $d(\Omega,\mathcal{D}) > R$, alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = \emptyset$.
Si $d(\Omega,\mathcal{D}) = R$, alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}$ est réduit à un point.
Si $d(\Omega,\mathcal{D}) < R$, alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}$ est constitué de deux points.

Intersection de deux cercles

Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de centre Ω_1 et Ω_2 distincts et de rayon R_1 et R_2.

Si $\Omega_1\Omega_2 > R_1 + R_2$ ou $\Omega_1\Omega_2 < \lvert R_1 - R_2\rvert$, alors $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$.
Si $\Omega_1\Omega_2 = R_1 + R_2$ ou $\Omega_1\Omega_2 = \lvert R_1 - R_2\rvert$, alors $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ est réduit à un point.
Si $\lvert R_1 - R_2\rvert < \Omega_1\Omega_2 < R_1 + R_2$, alors $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ est constitué de deux points.