Formulaire de calcul des limites

? ="forme indéterminée
$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$
I et J désignent des intervalles
$\bar{I}$ et $\bar{J}$ unions des intervalles I et J avec leurs bornes dans $\bar{\mathbb{R}}$

1 Règles de calculs

Somme

$+$	$-\infty$	ℓ_2	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
ℓ_1	$-\infty$	$\ell_1 + \ell_2$	$+\infty$
$+\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

Produit

$\times$	$-\infty$	$\ell_2 < 0$	0	$\ell_2 > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
$\ell_1 < 0$	$+\infty$	$\ell_1\ell_2$	0	$\ell_1\ell_2$	$-\infty$
0	?	0	0	0	?
$\ell_1 > 0$	$-\infty$	$\ell_1\ell_2$	0	$\ell_1\ell_2$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

Fraction

$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	$-\infty$	$\ell_2 < 0$	0^-	0^+	$\ell_2 > 0$	$+\infty$
$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
$\ell_1 < 0$	0^+	$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	$+\infty$	$-\infty$	$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	0^-
0	0	0	?	?	0	0
$\ell_1 > 0$	0^-	$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	$-\infty$	$+\infty$	$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	0^+
$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?

Puissance

$\ell_1^{\ell_2}$	$-\infty$	$\ell_2 < 0$	0	$\ell_2 > 0$	$+\infty$
0	$+\infty$	$+\infty$	?	0	0
$0 < \ell_1 < 1$	$+\infty$	$\ell_1^{\ell_2}$	1	$\ell_1^{\ell_2}$	0
1	?	1	1	1	?
$\ell_1 > 1$	0	$\ell_1^{\ell_2}$	1	$\ell_1^{\ell_2}$	$+\infty$
$+\infty$	0	0	?	$+\infty$	$+\infty$

Composée de limites
Soient $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$.
Soient $x_0 \in \bar{I}$ et $y_0 \in \bar{J}$.
On suppose que : $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} = y_0$ et $\lim\limits_{y \longrightarrow y_0} g(y) = \ell$.
Alors, $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(f(x)) = \ell$.

Limite et continuité
Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ tel que f est continue en x_0.
Alors : $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Limite et dérivation
Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ tel que f est dérivable en x_0.
Alors : $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

2 Limites usuelles

Puissance de x
<u>$n \in \mathbb{N}^*$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$</u>

$\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} x^n = x_0^n$	$\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} x^\alpha = x_0^\alpha$ si $x_0 > 0$	$\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} x^\alpha = 0$
$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \\ +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$	$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$
$\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$	$\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} x^\alpha = 0^+$
$\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$	$\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \\ +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$	
$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{x} = 0^+$	$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0^+$	$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{x^\alpha} = 0^+$
$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{1}{x} = 0^-$	$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} 0^- \text{ si } n \text{ est impair} \\ 0^+ \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$	

Fonctions usuelles

$\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \exp(x) = 0^+$	$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \exp(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\longrightarrow0^+} \ln(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \ln(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \mathrm{Argsh}(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \mathrm{Argsh}(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$
	$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \mathrm{Argch}(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\longrightarrow-\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\longrightarrow\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \arctan(x) = -\dfrac{\pi}{2}^+$	$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}^-$
$\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \mathrm{th}(x) = -1$	$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \mathrm{th}(x) = 1$
$\lim\limits_{x\longrightarrow-1} \mathrm{Argth}(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\longrightarrow1} \mathrm{Argth}(x) = +\infty$

Taux d'accroissement et autres

$\lim\limits_{x\longrightarrow0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\longrightarrow0} \dfrac{\exp(x)-1}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\longrightarrow0} \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\longrightarrow0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\longrightarrow0} \dfrac{\mathrm{th}(x)}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\longrightarrow0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\longrightarrow0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \dfrac{1}{2}$	$\lim\limits_{x\longrightarrow0} \dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha$	
$\lim\limits_{x\longrightarrow0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$	$\lim\limits_{x\longrightarrow0} \dfrac{\mathrm{ch}(x)-1}{x^2} = \dfrac{1}{2}$	
$\lim\limits_{x\longrightarrow0} \dfrac{\mathrm{Argsh}(x)}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\longrightarrow0} \dfrac{\arcsin(x)}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\longrightarrow0} \dfrac{\arctan(x)}{x} = 1$

Croissances comparées

$a > 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^\beta} = +\infty$	$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{a^x}{x^\beta} = +\infty$	$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$
$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{x^\alpha}{\ln(x)} = +\infty$	$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{x^\alpha}{\log_a(x)} = +\infty$	$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{x^\alpha}{\ln(x)^\beta} = +\infty$
$\lim\limits_{x\longrightarrow0^+} x^\alpha \ln(x) = 0^-$	$\lim\limits_{x\longrightarrow0^+} x^\alpha \log_a(x) = 0^-$	$\lim\limits_{x\longrightarrow0^+} x^\alpha \ln^\beta(x) = 0^-$
$\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} x^n\mathrm{e}^x = \begin{cases} 0^- & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0^+ & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$	$\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} x^n a^x = \begin{cases} 0^- & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0^+ & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$	
$\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} x^n\mathrm{e}^{\alpha x} = \begin{cases} 0^- & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0^+ & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$		