Nombre complexes et trigonométrie

Exercice 1. *Étude d'une équation*

On se propose de déterminer les nombres complexes z non nuls vérifiant : $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 2$.

1. Soit y un nombre réel. Déterminer en fonction de y les zéros du polynôme P_y défini par :

$$P_y(X) = X^2 + 2(y^2 - 1)X + y^4 - 6y^2 + 1$$

c'est à dire les solutions de l'équation $P_y(X) = 0$ à l'inconnue X .

2. Soit z un nombre complexe non nul, écrit $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 2$ si, et seulement si, $P_y(x^2) = 0$.
3. Le plan étant rapporté à un repère orthonormal, caractériser l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 2$ et le représenter graphiquement.

Exercice 2. *Une somme de cosinus...*

x désigne un nombre réel et n un entier naturel non nul.

1. Montrer (sans utiliser le résultat donné pour l'établir ; en particulier une démonstration par récurrence ne sera pas acceptée) que :

$$\sum_{k=1}^n \cos(2kx) = \begin{cases} \frac{\cos((n+1)x) \sin(nx)}{\sin(x)} & \text{si } x \neq 0[\pi] \\ n & \text{si } x = 0[\pi] \end{cases}$$

2. En déduire une expression de $\sum_{k=1}^n \cos^2(kx)$.

3. On pose : $S = \sum_{k=1}^4 \cos^2\left(\frac{k\pi}{9}\right)$. Exprimer la somme $\sum_{k=1}^9 \cos^2\left(\frac{k\pi}{9}\right)$ en fonction de S .

4. Déduire la valeur exacte de S des résultats précédents (c'est un rationnel très simple).

Exercice 3. *Étude d'une similitude*

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormale $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathcal{C}$ le cercle unité, *i.e.* le cercle de centre O et de rayon 1. On fixe deux points $A(a)$ et $B(b)$ du cercle $\mathcal{C}$. On note θ une mesure de $(\vec{OA}, \vec{OB})$. On suppose que : $\theta \in]0, \pi[$.

A tout point $M(z)$ de $\mathcal{C}$ distinct de A et de B , on associe le point $M'(z')$ défini comme l'intersection de la droite (BM) avec la droite orthogonale à (AM) passant par A .

1. Faire une figure soignée que l'on complètera au fur et à mesure de l'étude (échelle 2cm, $\theta = \frac{2\pi}{3}$).
2. Nous commençons par quelques questions préliminaires.
- (a) Donner une expression simple de $\bar{a}$, $\bar{b}$ et $\bar{z}$ en fonction de, respectivement, a , b et z .
- (b) Déterminer la valeur de $\frac{b}{a}$ en fonction de θ .
- (c) Montrer que : $\frac{a-b}{a+b} = -i \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

3. Nous étudions la transformation qui envoie M sur M' .

- (a) Montrer les relations suivantes :

$$bz\bar{z}' + z' - z - b = 0 \quad \text{et} \quad -az\bar{z}' + z' + z - a = 0$$

- (b) Déterminer alors une expression de z' en fonction de z , a et b .

- (c) Montrer alors qu'il existe une similitude s de $\mathcal{P}$ telle pour tout point M , le point M' soit l'image de M par s . Préciser les éléments caractéristiques de s (centre, rapport et mesure de l'angle).

4. Montrer que O' l'image de O par s est le point de concours de la médiatrice de $[AB]$ et des tangentes au cercle $\mathcal{C}$ en A et en B .

5. Décrire et représenter avec précision le lieu des points M' lorsque M varie sur $\mathcal{C}$ privé de A et B .