Lycée Gustave Eiffel Année 2010-2011
Mathématiques PTSI DM n°2
A rendre le 4 novembre 2010

Fonctions usuelles

Exercice 1. *Étude d'une fonction*

On se propose d'étudier la fonction f définie par :

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) - \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

1. Vérifier que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Préciser en quels points a priori on peut dériver la fonction f. On note D' l'ensemble de ces points. On vérifiera a postériori (*cf.* question 4) que D' est bien le domaine de dérivabilité de f.
   (b) Calculer et simplifier au maximum l'expression de f' là où elle est dérivable.
3. (a) En déduire, sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$, une expression simplifiée de f à une constante près.
   (b) En utilisant la continuité de f, préciser **ces** constantes.
4. Vérifier que l'ensemble D' est bien le domaine de dérivabilité de f.
   Préciser les demi-tangentes du graphe de f en -1, 0 et -1.
   Indication : On utilisera la dérivabilité de arctan en -1, 0 et 1.
5. Préciser la limite de f en $+\infty$.
   Représenter graphiquement la fonction f.
6. (a) Rappeler l'expression de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ en fonction de $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
   (b) Retrouver l'expression simplifiée précédente de f en utilisant les formules de trigonométrie.

Problème 1. *Étude de fonctions et d'une suite*

On se propose d'étudier la fonction f définie par l'expression :

$$f(x) = |x|^{\frac{1}{x-1}}$$

Partie I : Prolégomènes

1. On considère la fonction g définie par l'expression :

$$g(x) = \frac{x-1}{x} - \ln\big(|x|\big)$$

   (a) Préciser le domaine de définition de g.
   (b) Étudier les limites de g aux bords de son domaine de définition.
   (c) Dresser la tableau de variations de g.
   (d) Montrer qu'il existe un unique réel négatif α tel que : $g(\alpha) = 0$.
   En expliquant votre démarche d'un point de vue mathématique, déterminer à l'aide de votre calculatrice une valeur approchées de α à $0,1$ près. En particulier, vous récapitulerez dans un tableau l'ensemble des évaluations de g qui vous ont été nécessaires.
2. On considère la fonction h définie pour $x > 1$ par : $h(x) = \dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$.
   (a) Préciser pourquoi h est dérivable et montrer qu'il existe une fonction u telle que : $\forall x > 1 \quad h'(x) = \dfrac{u(x)}{(x-1)^3}$.
   (b) Dresser le tableau de variations de u.
   (c) En déduire le signe de u puis le signe de h'.
   (d) En déduire les variations de h sur $]1,+\infty[$.

Partie II : Étude de f

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier les limites de f aux bords de son domaine de définition.
   En déduire que la fonction f se prolonge par continuité en 1. On continue de noter f ce prolongement.
3. On admet que : $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} \dfrac{\ln(1+t)-t}{t^2} = -\dfrac{1}{2}$.
   Montrer que f est dérivable en 1 et préciser $f'(1)$.
   Indication : On écrira f sous la forme $f(x) = \mathrm{e}^{j(x)}$ et on montrera que j se prolonge par continuité en 1 en une fonction dérivable en 1.
4. Dresser le tableau de variations de f.
   Indication : On réexprimera la fonction f' à l'aide de la fonctions g.
5. Tracer le graphe de f. (échelle 2cm)
   On calculera $f(-1)$, $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$, $f(2)$ et $f(4)$.

Partie III : Étude d'une suite

On se propose d'étudier la suite u définie par :

$$u_0 = 4 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad (\star)$$

On admet que cette suite est bien définie.

1. (a) Montrer que : $\forall x \in \left[\dfrac{3}{2}, 4\right] \quad f(x) \in \left[\dfrac{3}{2}, 4\right]$.
   (b) Montrer alors par récurrence que la suite u est à valeurs dans $\left[\dfrac{3}{2}, 4\right]$.
2. (a) Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ l'équation :
   $$f(x) = x \quad (E)$$
   (b) En utilisant la continuité de f et la relation $(\star)$, montrer que si u converge vers $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, alors α est une solution de (E).
   (c) En déduire que si u converge, alors elle converge vers 2.
3. (a) Déterminer $k \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall x \geq \dfrac{3}{2} \quad -k \leq f'(x) \leq 0$.
   Indication : On réexprimera la fonction f' à l'aide de la fonctions h.
   (b) Sachant que $\ln(2) \approx 0,69$ et $\ln(3) \approx 1,09$ à 10^{-2} près par défaut, donner un encadrement de k.
   En déduire que $k \in [0, 1[$.
   (c) Pour $(x, y) \in \left[\dfrac{3}{2}, +\infty\right]^2$, déterminer : $\displaystyle\int_x^y f'(t)\mathrm{d}t$.
   (d) En utilisant la croissance de l'intégrale, établir que : $\forall (x, y) \in \left[\dfrac{3}{2}, +\infty\right]^2 \quad |f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$.
   Indication : Il sera nécessaire de traiter deux cas.
4. (a) En utilisant la question 3d, établir que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - 2| \leq k|u_n - 2|$.
   (b) Montrer alors par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - 2| \leq 2.k^n$.
   (c) En déduire que la suite u converge vers 2.