Lycée Gustave Eiffel — Année 2010-2011
Mathématiques PTSI 2 — Devoir maison n°2
Rendu le 4 novembre 2010

Exercice 1 : Étude d'une fonction

1. Les fonctions arccos et arcsin sont définies sur $[-1,1]$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
On a : $-1 \leq \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \iff -x^2-1 \leq x^2-1 \leq x^2+1$.
Ce dernier encadrement est vrai quel que soit $x \in \mathbb{R}$.
Donc : $-1 \leq \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$.
On a : $-1 \leq \dfrac{2x}{1+x^2} \leq 1 \iff -1-x^2 \leq 2x \leq 1+x^2$
$$\iff \left(0 \leq x^2+2x+1 \text{ et } 0 \leq x^2-2x+1\right)$$
Or : $x^2+2x+1=(x+1)^2 \geq 0$ et $x^2-2x+1=(x-1)^2 \geq 0$.
Donc : $-1 \leq \dfrac{2x}{1+x^2} \leq 1$.
$$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$
De plus, f est une somme de composées de fonctions continues.
$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

2. (a) Les fonctions $\left(x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}\right)$ et $\left(x \mapsto \dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ sont des fractions de fonctions polynômiales et sont donc dérivables.
De plus, le domaine de dérivabilité de arcsin et arccos est $]-1,1[$.
Par composée de fonctions dérivables, la fonction f est dérivable en x si $-1 < \dfrac{1-x^2}{1+x^2} < 1$ et $-1 < \dfrac{2x}{1+x^2} < 1$.
On résout : $\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = 1 \quad (E_1)$, $\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = -1 \quad (E_2)$, $\dfrac{2x}{1+x^2} = 1 \quad (E_3)$ et $\dfrac{2x}{1+x^2} = -1 \quad (E_3)$.
$$\begin{aligned}
\text{Or : } (E_1) &\iff 1-x^2 = 1+x^2 \iff 2x^2=0 \iff x=0\\
(E_2) &\iff 1-x^2 = -1-x^2 \iff 1=-1\\
(E_3) &\iff 2x = 1+x^2 \iff x^2-2x+1=0\\
&\iff (x-1)^2=0 \iff x=1\\
\text{et : } (E_4) &\iff 2x=-1-x^2 \iff x^2+2x+1=0\\
&\iff (x+1)^2=0 \iff x=-1
\end{aligned}$$
Ainsi, la fonction est dérivable en $x \in \mathbb{R}$ si $x \neq 0$, $x \neq 1$ et $x \neq -1$.

La fonction f est dérivable sur l'ensemble :
$$\boxed{D' =]-\infty,-1[\cup]-1,0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[}$$

Remarque 0.1. *A ce stade, il n'est pas acquis que la fonction f n'est pas dérivable en -1, 0 et 1. Nous savons seulement que les règles usuelles de dérivabilité ne s'applique pas en ces points. Il est nécessaire d'étudier spécifiquement la dérivabilité de f en ces points.*

(b) Remarquons que : $\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \dfrac{2-(1+x^2)}{1+x^2} = \dfrac{2}{1+x^2} - 1$,
$$\begin{aligned}
\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2} &= \frac{\sqrt{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}}{1+x^2}\\
&= \frac{\sqrt{4x^2}}{1+x^2} = \frac{2|x|}{1+x^2},\\
\text{et : } \sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2} &= \frac{\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}}{1+x^2}\\
&= \frac{\sqrt{x^4-2x^2+1}}{1+x^2}\\
&= \frac{\sqrt{(x^2-1)^2}}{1+x^2} = \frac{|x^2-1|}{1+x^2}.
\end{aligned}$$
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.
La fonction g est une fraction de fonctions dérivables. Elle est donc dérivable.
De plus : $g'(x) = \dfrac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.
On a : $f'(x) = \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}.\left(-\dfrac{1+x^2}{2|x|}\right) - \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.\dfrac{1+x^2}{|x^2-1|}$
D'où : $\boxed{f'(x) = \left(\dfrac{x}{|x|} + \dfrac{x^2-1}{|x^2-1|}\right)\dfrac{2}{1+x^2}}$

3. (a) On traite quatre cas :
i. Si $x \in]-\infty,-1[$:
On a : $x<0$. Donc : $|x|=-x$. D'où : $\dfrac{x}{|x|} = -1$.
On a : $x<-1$. Donc : $x^2-1>0$. D'où : $\dfrac{x^2-1}{|x^2-1|} = 1$.
D'où : $f'(x)=0$.
$$\boxed{\text{Il existe donc une constante } C_1 \in \mathbb{R} \text{ telle que : } \forall x \in]-\infty,-1[\quad f(x) = C_1.}$$

ii. Si $x \in]-1, 0[$:

On a : $x < 0$. Donc : $|x| = -x$. D'où : $\dfrac{x}{|x|} = -1$.

On a : $-1 < x < 1$. Donc : $x^2 - 1 < 0$. D'où : $\dfrac{x^2-1}{|x^2-1|} = -1$.

D'où : $f'(x) = -\dfrac{4}{1+x^2}$.

$\boxed{\text{Il existe donc une constante } C_2 \in \mathbb{R} \text{ telle que : } \forall x \in]-1,0[\quad f(x) = -4\arctan(x) + C_2.}$

iii. Si $x \in]0, 1[$:

On a : $x > 0$. Donc : $|x| = x$. D'où : $\dfrac{x}{|x|} = 1$.

On a : $-1 < x < 1$. Donc : $x^2 - 1 < 0$. D'où : $\dfrac{x^2-1}{|x^2-1|} = -1$.

D'où : $f'(x) = 0$.

$\boxed{\text{Il existe donc une constante } C_3 \in \mathbb{R} \text{ telle que : } \forall x \in]0,1[\quad f(x) = C_3.}$

iv. Si $x \in]1, +\infty[$:

On a : $x > 0$. Donc : $|x| = x$. D'où : $\dfrac{x}{|x|} = 1$.

On a : $x > 1$. Donc : $x^2 - 1 > 0$. D'où : $\dfrac{x^2-1}{|x^2-1|} = 1$.

D'où : $f'(x) = \dfrac{4}{1+x^2}$.

$\boxed{\text{Il existe donc une constante } C_4 \in \mathbb{R} \text{ telle que : } \forall x \in]1,+\infty[\quad f(x) = 4\arctan(x) + C_4.}$

(b) On a : $f(-1) = \arccos(0) - \arcsin(-1) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \pi$.

Sur $]-\infty, -1[$, on a : $f(x) = C_1$.
La fonction f est continue en -1.
Donc : $f(-1) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = C_1$.

D'où : $\boxed{C_1 = \pi}$

Sur $]-1, 0[$, on a : $f(x) = -4\arctan(x) + C_2$.
La fonction f est continue en -1.
Donc : $f(-1) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = -4\arctan(-1) + C_2 = \pi + C_2$.

D'où : $\boxed{C_2 = 0}$

On a : $f(1) = \arccos(0) - \arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} = 0$.

Sur $]0, 1[$, on a : $f(x) = C_3$.
La fonction f est continue en 1.
Donc : $f(1) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = C_3$.

D'où : $\boxed{C_3 = 0}$

Sur $]1, +\infty[$, on a : $f(x) = 4\arctan(x) + C_4$.
La fonction f est continue en 1.
Donc : $f(1) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = 4\arctan(1) + C_4 = \pi + C_4$.

D'où : $\boxed{C_4 = -\pi}$

4. (a) **Étude de la dérivabilité en -1 :**

Si $x \in]-\infty, -1[$, on a : $\dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = 0$.

Donc : $\lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = 0$.

Si $x \in]-1, 0[$, on a : $\dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \dfrac{-4\arctan(x) - \pi}{x} = -4\dfrac{\arctan(x) + \frac{\pi}{4}}{x+1}$.

Or, la fonction arctan est dérivable en -1 et $\arctan'(-1) = \dfrac{1}{1+(-1)^2} = \dfrac{1}{2}$.

Donc : $\lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = -2$.

On en déduit que la fonction f n'est pas dérivable en -1. De plus, la fonction f admet une demi-tangente horizontale à gauche et une demi-tangente de pente -2 à droite en -1.

(b) **Étude de la dérivabilité en 0 :**

Si $x \in]-1, 0[$, on a : $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = -4\dfrac{\arctan(x)}{x}$.

Or, la fonction arctan est dérivable en 0 et $\arctan'(0) = 1$.

Donc : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = -4$.

Si $x \in]0, 1[$, on a : $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 0$.

Donc : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 0$.

On en déduit que la fonction f n'est pas dérivable en 0. De plus, la fonction f admet une demi-tangente de pente -4 à gauche et une demi-tangente horizontale à droite en 0.

(c) **Étude de la dérivabilité en 1 :**

Si $x \in]0, 1[$, on a : $\dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = 0$.

Donc : $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = 0$.

Si $x \in]1,+\infty[$, on a : $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{4\arctan(x)-\pi}{x-1} = 4\dfrac{\arctan(x)-\frac{\pi}{4}}{x-1}$.

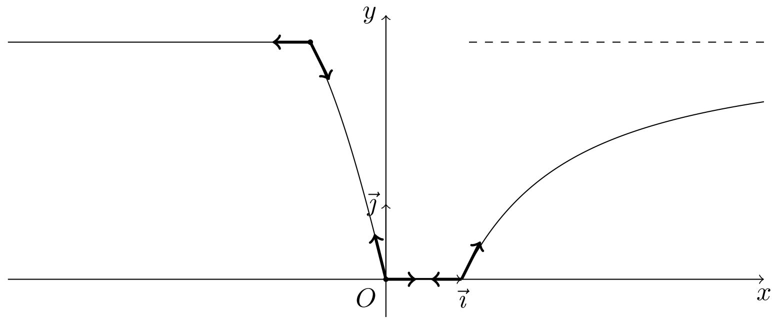
Or, la fonction arctan est dérivable en 1 et $\arctan'(1) = \dfrac{1}{2}$.

Donc : $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2$.

On en déduit que la fonction f n'est pas dérivable en 1. De plus, la fonction f admet une demi-tangente horizontale à gauche et une demi-tangente de pente 2 à droite en 1.

Le domaine de dérivabilité de f est bien D'.

5. Sur $]1,+\infty[$, on a : $f(x) = 4\arctan(x) - \pi$.
Donc : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = 4.\dfrac{\pi}{2} - \pi$ D'où : $\boxed{\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = \pi}$
On a la figure suivante :



6. (a) On a :

$$\boxed{\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{1-\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ \sin(\theta) = \dfrac{2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \end{cases}}$$

(b) On pose : $\theta = 2\arctan(x)$.
On a alors : $x = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

$$\text{D'où : } f(x) = \arccos\left(\frac{1-\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) - \arcsin\left(\frac{2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right).$$
$$= \arccos(\cos(\theta)) - \arcsin(\sin(\theta))$$

On traite quatre cas :

i. Si $x \in]-\infty,-1]$:
on a : $\arctan(x) \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{4}\right]$.
Donc : $\theta \in \left]-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right]$.
D'où : $-\theta \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$ et $-\pi-\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$
Par conséquent : $\arccos(\cos(\theta)) = \arccos(\cos(-\theta)) = -\theta$
et $\arcsin(\sin(\theta)) = \arcsin(\sin(-\pi-\theta)) = -\pi-\theta$.
On en déduit : $\underline{f(x) = \pi}$

ii. Si $x \in [-1,0]$:
on a : $\arctan(x) \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, 0\right]$.
Donc : $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$.
D'où : $-\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
Par conséquent : $\arccos(\cos(\theta)) = \arccos(\cos(-\theta)) = -\theta$
et $\arcsin(\sin(\theta)) = \theta$.
On en déduit : $\underline{f(x) = -2\theta = -4\arctan(x)}$

iii. Si $x \in [-1,0]$:
on a : $\arctan(x) \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.
Donc : $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
Par conséquent : $\arccos(\cos(\theta)) = \theta$ et $\arcsin(\sin(\theta)) = \theta$.
On en déduit : $\underline{f(x) = 0}$

iv. Si $x \in [1,+\infty[$:
on a : $\arctan(x) \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
Donc : $\theta \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$.
D'où : $\pi - \theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
Par conséquent : $\arccos(\cos(\theta)) = \theta$
et $\arcsin(\sin(\theta)) = \arcsin(\sin(\pi-\theta)) = \pi-\theta$.
On en déduit que : $\underline{f(x) = \pi - 2\theta = \pi - 4\arctan(x)}$

Nous avons donc établi :

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \pi & \text{si } s \in]-\infty,-1] \\ -4\arctan(x) & \text{si } s \in [-1,0] \\ 0 & \text{si } s \in [0,1] \\ 4\arctan(x) - \pi & \text{si } s \in [1,+\infty[\end{cases}}$$

Problème 1 : Étude de fonctions et d'une suite

Partie I : Prolégomènes

1. (a) On a : $|x| > 0 \iff x \neq 0$.
La fonction g est donc définie sur $\mathbb{R}^*$.

(b) Remarquons que $: g(x) = 1 - \dfrac{1}{x} - \ln\left(|x|\right)$

On a $: \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \ln\left(|x|\right) = +\infty$. et $: \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

D'où $: \boxed{\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} g(x) = -\infty}$

On a $: \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \ln\left(|x|\right) = +\infty$ et $: \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

D'où $: \boxed{\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = -\infty}$

On a $: \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \ln(|x|) = -\infty$ et $: \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

D'où $: \boxed{\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} g(x) = +\infty}$

On a $: g(x) = \dfrac{1}{x}\left(x - 1 + x\ln\left(|x|\right)\right)$.

Or $: \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} x\ln\left(|x|\right) = 0$.

Donc $: \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} x - 1 + x\ln\left(|x|\right) = -1$.

Or $: \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

D'où $: \boxed{\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} g(x) = -\infty}$

(c) La fonction g est une composée de fonctions dérivables. Elle est donc dérivable.

De plus $: g'(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1-x}{x^2}$.

On en déduit le tableau de variations suivants :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

(d) La fonction g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{-*}$.

De plus, $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} g(x) = +\infty$.

La fonction g est donc une bijection de $\mathbb{R}^{-*}$ dans $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Il existe donc un unique réel négatif tel que } : g(\alpha) = 0.}$$

Pour déterminer une valeur approchée, on balaye $\mathbb{R}^{-*}$ d'unité en unité de manière décroissante en partant de -1. Lorsque l'on constate un changement de signe de g entre deux valeurs x_0 et $x_0 + 1$, nous savons grâce à la croissance de g que α est un élément de $[x_0, x_0 + 1]$. On balaye alors l'intervalle $[x_0, x_0 + 1]$ avec de $0,1$ en $0,1$. Lorsque l'on constate un changement de signe de g entre deux valeurs x_1 et $x_1 + 0,1$, nous savons que $: x_1 \leq \alpha \leq x_1 + 0,1$.

En pratique, on a les tableaux de valeurs suivants :

x	-1	-2	-3	-4
$g(x)$	$2,00$	$0,81$	$0,23$	$-0,14$

et :

x	-3	$-3,1$	$-3,2$	$-3,3$	$-3,4$	$-3,5$	$-3,6$
$g(x)$	$0,235$	$0,191$	$0,149$	$0,109$	$0,070$	$0,033$	$-0,003$

On en déduit $: \boxed{-3,6 \leq \alpha \leq -3,5}$

2. (a) La fonction h est une fraction de fonctions dérivables sur $]1, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } h \text{ est donc dérivable.}}$$

On a $: h'(x) = \dfrac{g'(x)}{(x-1)^2} - \dfrac{2g(x)}{(x-1)^3} = \dfrac{(x-1)g'(x) - 2g(x)}{(x-1)^3}$.

On trouve donc $: u(x) = (x-1)g'(x) - 2g(x)$

$$= -\frac{(x-1)^2}{x^2} - 2\frac{x-1}{x} + 2\ln(x)$$

On a donc $: \boxed{u(x) = \dfrac{-3x^2 + 4x - 1}{x^2} + 2\ln(x)}$

(b) La fonction u est une somme de fonctions dérivables sur $]1, +\infty[$.

On a $: u(x) = -3 + \dfrac{4}{x} - \dfrac{1}{x^2} + 2\ln(x)$. $\quad (\star)$

Donc $: u'(x) = -\dfrac{4}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{2}{x} = \dfrac{2(x^2 - 2x + 1)}{x^3} = \dfrac{2(x-1)^2}{x^3} > 0$.

Or, par l'expression $(\star)$, on a $: \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} u(x) = +\infty$

et $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} u(x) = 0$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	1		$+\infty$
$u'(x)$	‖	$+$	
$u(x)$	‖ 0	$\nearrow$	$+\infty$

(c) La fonction u est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

De plus, $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} u(x) = 0$.

On en déduit que : $\boxed{\forall x > 1 \quad u(x) > 0}$

On a : $h'(x) = \dfrac{u(x)}{(x-1)^3}$.

Donc : $\boxed{\forall x > 1 \quad h'(x) > 0}$

(d) On a donc le tableau de variations suivant :

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$\|\|$ $\qquad +$
$h(x)$	$\|\|$ $\qquad \nearrow$

Partie II : Étude de f

1. On a : $f(x) = |x|^{\frac{1}{x-1}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln\left(|x|\right)}{x-1}}$.
La fonction f est donc définie en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $x - 1 \neq 0$ et $|x| > 0$.
$\boxed{\text{Le domaine de définition de } f \text{ est donc }]-\infty, 0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[.}$

2. On a : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \ln\left(|x|\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{1}{x-1} = -1$.

Donc : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\ln\left(|x|\right)}{x-1} = +\infty$.

D'où : $\boxed{\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = +\infty}$

Si $x > 0$, on a : $\dfrac{\ln\left(|x|\right)}{x-1} = \dfrac{\ln(x)}{x} \dfrac{1}{1 - \frac{1}{x}}$.

Or : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} 1 - \dfrac{1}{x} = 1$.

D'où : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{\ln\left(|x|\right)}{x-1} = 0$.

On en déduit que : $\boxed{\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 1}$

Si $x < 0$, on a : $\dfrac{\ln\left(|x|\right)}{x-1} = \dfrac{\ln\left(-x\right)}{-x} \dfrac{-x}{x-1} = \dfrac{\ln\left(-x\right)}{-x} \dfrac{-1}{1 - \frac{1}{x}}$.

Or : $\lim\limits_{y \longrightarrow +\infty} \dfrac{\ln(y)}{y} = 0$. Donc : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{\ln(-x)}{-x} = 0$.

D'autre part : $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} 1 - \dfrac{1}{x} = 1$.

D'où : $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{\ln\left(|x|\right)}{x-1} = 0$.

On en déduit que : $\boxed{\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 1}$

Si $x > 0$, on a : $\dfrac{\ln\left(|x|\right)}{x-1} = \dfrac{\ln(x)}{x-1}$.

Or : $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$.

Donc : $\boxed{\lim\limits_{x \longrightarrow 1} f(x) = \mathrm{e}}$

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ se prolonge donc par continuité en 1 en posant } f(1) = \mathrm{e}.}$

3. Si $x > 0$, on a : $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{\ln(x)}{x-1}}$.
Soit j la fonction définie par l'expression $j(x) = \dfrac{\ln(x)}{x-1}$. D'après la question précédente, cette fonction se prolonge par continuité en 1 par $j(1) = 1$.

On a : $\dfrac{j(x) - j(1)}{x-1} = \dfrac{\frac{\ln(x)}{x-1} - 1}{x-1} = \dfrac{\ln(x) - (x-1)}{(x-1)^2}$.

On pose $t = x - 1$.

On a alors : $\dfrac{j(x) - j(1)}{x-1} = \dfrac{\ln(1+t) - t}{t^2}$.

Or : $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} x - 1 = 0$ et $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} \dfrac{\ln(1+t) - t}{t^2} = -\dfrac{1}{2}$.

On en déduit que : $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{j(x) - j(1)}{x-1} = -\dfrac{1}{2}$.

La fonction j est donc dérivable en 1 et $j'(1) = -\dfrac{1}{2}$.

D'autre part, la fonction exp est dérivable en 1 et son nombre dérivé en 1 est : e.
La fonction f est donc en 1 une composée de fonctions dérivables.

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc une fonction dérivable en 1 et : } f'(1) = -\dfrac{\mathrm{e}}{2}.}$

4. Si $x \neq 1$, : $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{\ln\left(|x|\right)}{x-1}}$. La fonction f est donc une composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

On a : $f'(x) = \left(\dfrac{1}{x(x-1)} - \dfrac{\ln\left(|x|\right)}{(x-1)^2}\right) \mathrm{e}^{\frac{\ln(|x|)}{x-1}}$ La fonction f est positive. La

$$= \left(\frac{x-1}{x} - \ln\left(|x|\right)\right) \frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln\left(|x|\right)}{x-1}}}{(x-1)^2}$$

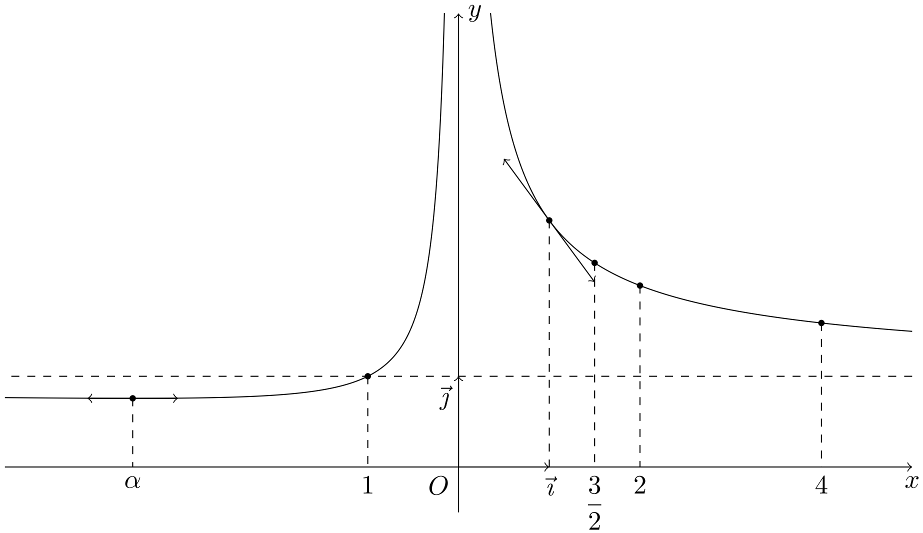
$$= \frac{g(x)f(x)}{(x-1)^2}$$

fonction f' est donc du signe de g.
Or, d'après les variations de g, on en déduit le tableau de variations suivants :

x	$-\infty$		α		0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	$-\frac{\mathrm{e}}{2}$	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	e	$\searrow$	1

5. On a : $f(-1) = 1^{-\frac{1}{2}} = 1$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, $f(2) = 2$, $f(4) = 4^{\frac{1}{3}}$.

On a la figure suivante :



Partie III : Étude d'une suite

On se propose d'étudier la suite u définie par :

$$u_0 = 4 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad (\star)$$

On admet que cette suite est bien définie.

1. (a) Soit $x \in \left[\frac{3}{2}, 4\right]$.

La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

Donc : $f(4) \leq f(x) \leq f\left(\frac{3}{2}\right)$.

Or : $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} < 4$ et $f(4) = 4^{\frac{1}{3}}$.

On a : $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} < 4$. Donc : $f(4) > \frac{3}{2}$.

D'où : $\frac{3}{2} \leq f(x) \leq 4$.

On en déduit : $\boxed{\forall x \in \left[\frac{3}{2}, 4\right] \quad f(x) \in \left[\frac{3}{2}, 4\right]}$

(b) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in \left[\frac{3}{2}, 4\right]$.

Initialisation : On a : $u_0 = 4 \in \left[\frac{3}{2}, 4\right]$.

La propriété $(\mathcal{P}_0)$ est donc vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose : $u_n \in \left[\frac{3}{2}, 4\right]$.

Or : $u_{n+1} = f(u_n)$.

D'après la question précédente, on en déduit que : $u_{n+1} \in \left[\frac{3}{2}, 4\right]$.

Par le principe de récurrence, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in \left[\frac{3}{2}, 4\right]$.

$$\boxed{\text{La suite } u \text{ est donc à valeur dans } \left[\frac{3}{2}, 4\right].}$$

2. (a) On traite deux cas :

i. Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$:

On a : $(E) \iff \mathrm{e}^{\frac{\ln(x)}{x-1}} = x$.

$$\iff \frac{\ln(x)}{x-1} = \ln(x)$$
$$\iff \frac{1}{x-1} = 1 \quad \text{car } \ln(x) \neq 0$$
$$\iff x = 2$$

ii. Si $x = 1$, alors $f(1) = \mathrm{e} \neq 1$. Donc 1 n'est pas solution de (E).

$$\boxed{\text{L'unique solution de } (E) \text{ est donc } 2.}$$

(b) On suppose que la suite u converge vers $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.
On a alors : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \alpha$.
Donc : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_{n+1} = \alpha$.

D'autre part : $u_{n+1} = f(u_n)$ et la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et donc en α.
D'où : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_{n+1} = f(\alpha)$.
On en déduit, par l'unicité de la limite, que : $\alpha = f(\alpha)$.

$\boxed{\text{On en déduit que si la suite } u \text{ converge vers } \alpha \in \mathbb{R}^{+*}\text{, alors } \alpha \text{ est une solution de } (E).}$

(c) L'unique solution de (E) est 2.

$\boxed{\text{Par la question précédente, on en déduit que si } u \text{ converge, alors elle converge vers 2.}}$

3. (a) On a : $f'(x) = h(x)f(x)$.
La fonction f est positive et décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Donc : $\forall x \geq \frac{3}{2} \quad 0 \leq f(x) \leq f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$.
Sur $[1, +\infty[$, la fonction h est croissante et du même signe que g.
Donc : $\forall x \geq \frac{3}{2} \quad h\left(\frac{3}{2}\right) \leq h(x) \leq 0$.
Or $h\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{g\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{2^2}} = \frac{4}{3} - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right)$.
D'où : $\boxed{\forall x \geq \frac{3}{2} \quad 3 - 9\ln\left(\frac{3}{2}\right) \leq f'(x) \leq 0}$ On a donc : $\boxed{k = 9\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 3}$

(b) On a : $k = 9\ln(3) - 9\ln(2) - 3$.
D'après les valeurs approchées proposées, on a : $1,09 \leq \ln(3) \leq 1,10$.
et : $0,69 \leq \ln(2) \leq 0,70$
Donc : $-0,70 \leq -\ln(2) \leq -0,69$.
D'où : $9.1,09 - 9.0,70 - 3 \leq k \leq 9.1,10 - 9.0,69 - 3$.
On en déduit : $\boxed{0,51 \leq k \leq 0,69}$ et donc : $\boxed{k \in [0,1[}$

(c) Soit $(x,y) \in \left]\frac{3}{2}, +\infty\right]^2$.
La fonction f' est continue sur $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[^2$. Une primitive de f' est f.
Donc : $\int_x^y f'(t)\mathrm{d}t = [f(t)]_x^y$.
D'où : $\boxed{\int_x^y f'(t)\mathrm{d}t = f(y) - f(x)}$

(d) Soit $(x,y) \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[^2$.
On a : $\forall x > \frac{3}{2} \quad -k \leq f'(x) \leq 0$.
On traite deux cas :

i. Si $x < y$: Par la croissance de l'intégrale, on a :
$\int_x^y -k\mathrm{d}t \leq \int_x^y f'(t)\mathrm{d}t \leq \int_x^y 0\mathrm{d}t$.
Donc : $-k(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq 0$.

ii. Si $x > y$: Par la croissance de l'intégrale, on a :
$\int_x^y 0\mathrm{d}t \leq \int_x^y f'(t)\mathrm{d}t \leq \int_x^y -k\mathrm{d}t$.
Donc : $0 \leq f(y) - f(x) \leq -k(y-x)$.

Dans les deux cas, on a bien : $|f(y) - f(x)| \leq k|y-x|$.
D'où : $\boxed{\forall (x,y) \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[^2 \quad |f(y) - f(x)| \leq k|y-x|}$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a : $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(2) = 2$.
Donc : $u_{n+1} - 2 = f(u_n) - f(2)$.
D'après la question III-1.(c), la suite u est à valeurs dans $\left[\frac{3}{2}, 4\right]$. Donc $u_n \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$. D'autre part, $2 \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$. D'après la question précédente, on en déduit : $|u_{n+1} - 2| \leq k|u_n - 2|$.
D'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - 2| \leq k|u_n - 2|}$

(b) Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - 2| \leq 2.k^n \quad (\mathcal{H}_n)$.
Initialisation : On a : $|u_0 - 2| = |4 - 2| = 2 = 2.k^0$.
La propriété $(\mathcal{H}_0)$ est donc vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $(\mathcal{H}_n)$.
On a : $|u_{n+1} - 2| \leq k|u_n - 2| \leq k.2.k^n = 2.k^{n+1}$.
La propriété est donc héréditaire. Par le principe de récurrence, on en déduit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - 2| \leq 2.k^n}$

(c) On a : $k \in [0,1[$.
Donc : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} 2.k^n = 0$.
Or : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq |u_n - 2| \leq 2.k^n$ D'après le théorème d'encadrement dit "des gendarmes", la suite $\left(|u_n - 2|\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} |u_n - 2| = 0$.

$\boxed{\text{On en déduit que la suite } u \text{ converge vers 2.}}$