

Équations différentielles

On fixe $k \in \mathbb{R}^+$.

On se propose d'étudier l'équation différentielle suivante :

$$(1 - x^2)y'' - xy' + k^2y = 0 \quad (E)$$

Si I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point), on appelle solution de (E) sur I toute fonction f deux fois dérivable sur I vérifiant : $\forall x \in I \quad (1 - x^2)f''(x) - xf'(x) + k^2f(x) = 0$.

Partie I : Préliminaires

1. Montrer que $\forall x \in [1, +\infty[\quad \operatorname{argch}(x) = \ln(1 + \sqrt{x^2 - 1})$.

Partie II : On suppose dans cette partie que $k = 0$

1. Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre (E_1) vérifiée par y' si, et seulement si, y est solution de (E) .
2. (a) Résoudre l'équation (E_1) sur $] -1, 1[$ et en déduire les solutions de (E) sur $] -1, 1[$.
(b) Montrer qu'il existe une unique solution f_1 de (E) sur $] -1, 1[$ tel que : $f_1(0) = 0$ et $f_1'(0) = 1$.
3. (a) Résoudre l'équation (E_1) sur $]1, +\infty[$ et en déduire les solutions de (E) sur $]1, +\infty[$.
(b) Préciser les fonctions f_2 solutions de (E) sur $]1, +\infty[$ telles que : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f_1(x)$.

On note ℓ cette limite et on fixe f_2 une de ces solutions.

4. La fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = f_1(x) & \text{si } x \in] -1, 1[\\ g(1) = \ell \\ g(x) = f_2(x) & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

est-elle solution de (E) sur $] -1, +\infty[$?

Partie III : On suppose $k > 0$ et on détermine les solutions de (E) définies sur $] -1, 1[$

1. Montrer que y est solution de (E) sur si, et seulement si, la fonction Y définie par $Y(t) = y(\sin(t))$ pour $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, vérifie l'équation différentielle :

$$Y'' + k^2Y = 0 \quad (E_2)$$

2. (a) En déduire les solutions de (E) sur $] -1, 1[$.
(b) Préciser ces solutions lorsque $k = 1$.

Partie IV : On suppose que $k > 0$, et on détermine les solutions de (E) sur $]1, +\infty[$ et sur $] -\infty, -1[$.

1. Montrer que y est solution de (E) sur $]1, +\infty[$ si, et seulement si, la fonction Z définie par $Z(t) = y(\operatorname{ch}(t))$ pour $t \in]0, +\infty[$, vérifie l'équation différentielle

$$Z'' - k^2Z = 0 \quad (E_3)$$

2. En déduire que les solutions de (E) sur $]1, +\infty[$ sont données par

$$y(x) = \lambda \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^k + \mu \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^{-k}$$

où λ et μ désignent deux nombres réels arbitraires.

3. Déterminer de manière analogue les solutions de (E) sur $] -\infty, -1[$.

Partie V : On suppose que $k = 5$, et on recherche les solutions polynomiales de (E) .

1. Si P est un polynôme non nul solution de (E) sur $\mathbb{R}$, préciser son degré.

Indication : On écrira P sous la forme $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ avec $a_n \neq 0$.

2. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(5\theta)$ et $\sin(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$.
Vérifier que $\sin(5\theta)$ peut s'exprimer comme un polynôme relativement à $\sin(\theta)$.
3. De l'étude faite dans la partie III, déduire les solutions polynomiales de (E) .