Lycée Gustave Eiffel — Année 2010-2011
Mathématiques PTSI 2 — Devoir maison n°3
Rendu le 6 décembre 2010

Équations différentielles

Partie I : Préliminaires

1. On résout l'équation d'inconnue y suivante : $\mathrm{ch}(y) = x \quad (E)$ où $x \in [1, +\infty[$.

   On a : $(E) \iff \dfrac{\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}}{2} = x$
   $\iff \mathrm{e}^{2y} + 1 = 2x\mathrm{e}^y$
   $\iff \mathrm{e}^{2y} - 2x\mathrm{e}^y + 1 = 0$
   $\iff (\mathrm{e}^y - x)^2 = x^2 - 1$

   Or : $x \in [1, +\infty[$. Donc : $x^2 - 1 \geq 0$.
   D'où : $(E) \iff \mathrm{e}^y - x = \sqrt{x^2-1}$ ou $\mathrm{e}^y - x = -\sqrt{x^2-1}$.
   $\iff \mathrm{e}^y = x + \sqrt{x^2-1}$ ou $\mathrm{e}^y = x - \sqrt{x^2-1}$

   Or : $x \geq 1$. Donc : $x + \sqrt{x^2-1} \geq 1 > 0$.
   De plus, $\sqrt{x^2-1} < \sqrt{x^2} = x$ ($x \geq 0$). D'où : $x - \sqrt{x^2-1} > 0$.
   D'où : $(E) \iff y = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ ou $y = \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$.
   Or : $x + \sqrt{x^2-1} \geq 1$. Donc : $\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \geq 0$.
   De plus, $\mathrm{Argch}(x)$ est par définition l'unique solution positive de (E).
   On en déduit que : $\boxed{\forall x \in [1, +\infty[\quad \mathrm{Argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)}$

Partie II

1. Puisque $k = 0$, on a : $(E) \iff (1-x^2)y'' - xy' = 0$.

   > y est donc solution de (E) si, et seulement si, y' est une solution de l'équation d'inconnue z suivante :
   > $$(1-x^2)z' - xz = 0 \quad (E_1)$$

2. (a) Sur $]-1, 1[$, l'équation (E_1) est équivalente à : $z' - \dfrac{x}{1-x^2}z = 0$.
   Une primitive de $-\dfrac{x}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{-2x}{1-x^2}$ est : $\dfrac{1}{2}\ln|1-x^2|$.
   Or, si $x \in]-1, 1[$, alors $1 - x^2 \geq 0$. La primitive devient : $\dfrac{1}{2}\ln(1-x^2)$.

   > La solution générale de (E_1) sur $]-1, 1[$ est donc :
   > $$\lambda \exp(-\ln(1-x^2)) = \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}$$
   > où $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Ainsi, y est solution de (E) sur $]-1, 1[$ si, et seulement si, y est une primitive d'une fonction de la forme $\dfrac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Or, une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est $\arcsin(x)$.

   > La solution générale de (E) est donc :
   > $$\lambda \arcsin(x) + \mu$$
   > où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

   (b) En 0, la solution générale de (E) vaut : μ. Sa dérivée vaut $\dfrac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}$; ce qui en 0 donne λ.
   On a donc l'équivalence suivante :
   $$\begin{cases} (1-x^2)y'' - xy' = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} y(x) = \lambda \arcsin(x) + \mu \\ \mu = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

   > On en déduit que la fonction f_1 définie par :
   > $$f_1(x) = \arcsin(x)$$
   > est l'unique solution de (E) telle que : $f_1(0) = 0$ et $f_1'(0) = 1$.

3. (a) Sur $]1, +\infty[$, l'équation (E_1) est équivalente à : $z' - \dfrac{x}{1-x^2}z = 0$.
   Une primitive de $-\dfrac{x}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{-2x}{1-x^2}$ est : $\dfrac{1}{2}\ln|1-x^2|$.
   Or, si $x \in]1, +\infty[$, alors $1 - x^2 \leq 0$. La primitive devient : $\dfrac{1}{2}\ln(x^2-1)$.

   > La solution générale de (E_1) sur $]-1, 1[$ est donc :
   > $$\lambda \exp(-\ln(1-x^2)) = \frac{\lambda}{\sqrt{x^2-1}}$$
   > où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ainsi, y est solution de (E) sur $]1,+\infty[$ si, et seulement si, y est une primitive d'une fonction de la forme $\dfrac{\lambda}{\sqrt{x^2-1}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Or, une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ est $\text{Argch}(x)$.

La solution générale de (E) est donc :

$$\lambda \text{Argch}(x) + \mu$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

(b) On a : $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 1^-} f_1(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} \arcsin(x) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.
Or : $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 1^+} \lambda \text{Argch}(x) + \mu = \mu$.

Ainsi, les fonctions f_2 telles que $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 1^-} f_1(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} f_2(x)$ sont les fonctions de la forme : $f_2(x) = \lambda \text{Argch}(x) + \dfrac{\pi}{2}$.

4. On a : $\ell = \dfrac{\pi}{2} = \arcsin(1)$.
et, si $x \in]-1,1[$, alors $g(x) = \arcsin(x)$.
Ainsi, la restriction de g à $]-1,1]$ est arcsin.
Or, la fonction arcsin n'est pas dérivable en 1.
La fonction g n'est donc pas dérivable en 1.
La fonction n'est pas une solution de (E) sur $]-1,+\infty[$.

Partie III

1. La fonction Y est une composée de fonctions dérivables deux fois. Elle est donc dérivable deux fois.
On a : $Y'(t) = \cos(t) y'(\sin(t))$
et : $Y''(t) = -\sin(t) y'(\sin(t)) + \cos^2(t) y''(\sin(t))$
$\quad = -\sin(t) y'(\sin(t)) + (1-\sin^2(t)) y''(\sin(t))$
D'où : $Y''(t) + k^2 Y(t) = (1-\sin^2(t)) y''(\sin(t)) - \sin(t) y'(\sin(t)) + k^2 y(\sin(t))$.
Ainsi : Y est solution de (E_2) si, et seulement si, $\forall t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\quad (1-\sin^2(t)) y''(\sin(t)) - \sin(t) y'(\sin(t)) + k^2 y(\sin(t)) = 0$.
Or, la fonction sin est une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ dans $]-1,1[$.
D'où : Y est solution de (E_2) si, et seulement si, $\forall x \in]-1,1[\quad (1-x^2) y''(x) - x y'(x) + k^2 y(x) = 0$.

On en déduit que y est solution de (E) sur $]-1,1[$ si, et seulement si, Y est solution de (E_2).

2. (a) La solution générale de (E_2) est : $\lambda \cos(kx) + \mu \sin(kx)$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Or : $Y(\arcsin(x)) = y(\sin(\arcsin(x))) = y(x)$.

D'après la question précédente, la solution générale de (E) sur $]-1,1[$ est donc :

$$\lambda \cos(k \arcsin(x)) + \mu \sin(k \arcsin(x))$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

(b) On a : $\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - \sin^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$.
Or, la fonction arcsin est à valeurs dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et la fonction cos est positive sur cette intervalle.
Donc : $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

Ainsi, si $k=1$, la solution générale de (E) est :

$$\lambda \sqrt{1-x^2} + \mu x$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Partie IV

1. La fonction Z est une composée de fonctions dérivables deux fois. Elle est donc dérivable deux fois.
On a : $Z'(t) = \text{sh}(t) y'(\text{ch}(t))$
et : $Z''(t) = \text{ch}(t) y'(\text{ch}(t)) + \text{sh}^2(t) y''(\text{ch}(t))$
$\quad = \text{ch}(t) y'(\text{sh}(t)) + (\text{ch}^2(t) - 1) y''(\text{sh}(t))$
D'où : $Z''(t) - k^2 Z(t) = (\text{ch}^2(t) - 1) y''(\text{ch}(t)) + \text{ch}(t) y'(ch(t)) - k^2 y(\text{ch}(t))$.
Ainsi : Z est solution de (E_3) si, et seulement si, $\forall t \in]0,+\infty[\quad (\text{ch}^2(t) - 1) y''(\text{ch}(t)) + \text{ch}(t) y'(ch(t)) - k^2 y(\text{ch}(t)) = 0$.
Or, la fonction ch est une bijection de $]0,+\infty[$ dans $]1,+\infty[$.
D'où : Z est solution de (E_2) si, et seulement si, $\forall x \in]1,+\infty[\quad (x^2-1) y''(x) + x y'(x) - k^2 y(x) = 0$.

On en déduit que y est solution de (E) sur $]1,+\infty[$ si, et seulement si, Z est solution de (E_3).

2. (a) La solution générale de (E_3) est $\lambda e^{kt} + \mu e^{-kt}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Or : $Z(\text{Argch}(x)) = y(\text{ch}(\text{Argch}(x))) = y(x)$.
La solution générale de (E) sur $[1,+\infty[$ est donc : $\lambda e^{k \text{Argch}(x)} + \mu e^{-k \text{Argch}(x)}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Or : $\text{Argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.
Donc : $e^{k \text{Argch}(x)} = e^{k \ln(x+\sqrt{x^2-1})} = (x + \sqrt{x^2-1})^k$.

La solution générale de (E) sur $[1,+\infty[$ est donc :

$$\lambda(x+\sqrt{x^2-1})^k+\mu(x+\sqrt{x^2-1})^{-k}$$

où $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

(b) On pose W la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $W(t)=y(-\mathrm{ch}(t))$.
La fonction W est une composée de fonctions dérivables deux fois. Elle est donc dérivable deux fois.
On a : $W'(t)=-\mathrm{sh}(t)y'(-\mathrm{ch}(t))$
et : $W''(t)=-\mathrm{ch}(t)y'(-\mathrm{ch}(t))+\mathrm{sh}^2(t)y''(-\mathrm{ch}(t))$
$=-\mathrm{ch}(t)y'(-\mathrm{ch}(t))+(\mathrm{ch}^2(t)-1)y''(-\mathrm{ch}(t))$
Donc : $W''(t)-k^2W(t)=(\mathrm{ch}^2(t)-1)y''(-\mathrm{ch}(t))-\mathrm{ch}(t)y'(-\mathrm{ch}(t))$
$-k^2y(-\mathrm{ch}(t))$
La fonction W est solution de (E_3) si, et seulement si, pour tout $t\in]0,+\infty[$, on a : $((-\mathrm{ch}(t))^2-1)y''(-\mathrm{ch}(t))+(-\mathrm{ch}(t))y'(-\mathrm{ch}(t))-k^2y(-\mathrm{ch}(t))=0$.
Or la fonction $-\mathrm{ch}$ est une bijection de $]0,+\infty[$ dans $]-\infty,-1[$.
La fonction y est donc solution de (E) sur $]-\infty,-1[$ si, et seulement si, W est solution de (E_3) sur $]0,+\infty[$.
Or : $W(\mathrm{Argch}(-x))=y(-\mathrm{ch}(\mathrm{Argch}(-x)))=y(-(-x))=y(x)$.
La solution générale de (E) sur $]-\infty,-1[$ est donc : $\lambda e^{k\mathrm{Argch}(-x)}+\mu e^{-k\mathrm{Argch}(-x)}$ où $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
Or :$\mathrm{Argch}(-x)=\ln((-x)+\sqrt{(-x)^2-1})=\ln(-x+\sqrt{1-x^2})$.
Donc :$e^{k\mathrm{Argch}(-x)}=e^{k\ln(-x+\sqrt{x^2-1})}=(-x+\sqrt{x^2-1})^k$.

La solution générale de (E) sur $]-\infty,-1[$ est donc :

$$\lambda(-x+\sqrt{1-x^2})^k+\mu(-x+\sqrt{1-x^2})^{-k}$$

où $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Partie V

1. Soit $P=\sum_{i=0}^{n}a_iX^i$ un polynôme de degré $n\in\mathbb{N}$ solution de l'équation (E). On a donc : $a_n\neq 0$.
On a : $P'(x)=\sum_{i=0}^{n}ia_ix^{i-1}$. Donc : $xP'(x)=\sum_{i=0}^{n}ia_ix^i$.
De plus, on a : $P''(x)=\sum_{i=1}^{n}i(i-1)a_ix^{i-2}$.
Donc : $(1-x^2)P''(x)=\sum_{i=0}^{n}i(i-1)a_ix^{i-2}-\sum_{i=1}^{n}i(i-1)a_ix^i$.

Donc :
$$\begin{aligned}0&=(1-x^2)P''(x)-xP'(x)+25P(x)\\&=\sum_{i=1}^{n}(-i(i-1)-i+25)a_ix^i+\sum_{i=1}^{n}i(i-1)a_ix^{i-2}\\&=\sum_{i=1}^{n}(-i^2+25)a_ix^i+\sum_{i=1}^{n}i(i-1)a_ix^{i-2}\end{aligned}$$
Le terme de degré n de ce polynôme est donc : $-n^2+25=0$. Puisque $n\in\mathbb{N}$, on en déduit que : $n=5$.

Ainsi, si P est un polynôme solution de (E), alors le degré de P est 5.

2. On a : $\cos(5\theta)+\mathrm{i}\sin(5\theta)=(\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta))^5$.
D'après la formule du binôme de Newton, on en déduit :
$$\begin{aligned}\cos(5\theta)+\mathrm{i}\sin(5\theta)&=\cos^5(\theta)+5\cos^4(\theta)(\mathrm{i}\sin(\theta))+10\cos^3(\theta)(\mathrm{i}\sin(\theta)^2\\&\quad+10\cos^2(\theta)(\mathrm{i}\sin(\theta))^3+5\cos(\theta)(\mathrm{i}\sin(\theta))^4\\&\quad+(\mathrm{i}\sin(\theta))^5\\&=\left(\cos^5(\theta)-10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)+5\cos(\theta)\sin^4(\theta)\right)\\&\quad+\mathrm{i}\left(5\cos^4(\theta)\sin(\theta)-10\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)+\sin^5(\theta)\right)\end{aligned}$$
On obtient donc : $\boxed{\begin{cases}\cos(5\theta)&=\cos^5(\theta)-10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)+5\cos(\theta)\sin^4(\theta)\\\sin(5\theta)&=5\cos^4(\theta)\sin(\theta)-10\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)+\sin^5(\theta)\end{cases}}$
On a :
$$\begin{aligned}\sin(5\theta)&=5\cos^4(\theta)\sin(\theta)-10\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)+\sin^5(\theta)\\&=5(1-\sin^2(\theta))^2\sin(\theta)-10(1-\sin^2(\theta))\sin^3(\theta)+\sin^5(\theta)\\&=5(\sin(\theta)-2\sin^3(\theta)+\sin^5(\theta))-10(\sin^3(\theta)-\sin^5(\theta))+\sin^5(\theta)\end{aligned}$$
D'où : $\boxed{\sin(5\theta)=16\sin^5(\theta)-20\sin^3(\theta)+5\sin(\theta)}$

3. D'après la partie III, la solution générale de (E) sur $]-1,1[$ est :
$$\lambda\cos(5\arcsin(x))+\mu\sin(5\arcsin(x))\text{ où }(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$
D'après la question précédente, on a :
$$\begin{aligned}\sin(5\arcsin(x))&=16\sin^5(\arcsin(x))-20\sin^3(\arcsin(x))+5\sin(\arcsin(x))\\&=16x^5-20x^3+5x\end{aligned}$$
Ainsi, la solution générale de (E) sur $]-1,1[$ est un polynôme si, et seulement si, $\lambda=0$ ou $\cos(5\arcsin(x))$ est un polynôme.
Supposons donc par l'absurde que $(x\mapsto\cos(5\arcsin(x)))$ est un polynôme P.
Ce polynôme est non nul. Par la question 1 de la partie V, ce polynôme P est de degré 5.
De plus, le polynôme P et la fonction $(x\mapsto\cos(5\arcsin(x)))$ se prolonge par continuité sur $[-1,1]$. L'égalité est alors vérifiée sur $[-1,1]$.

Or, si $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $P(\sin(\theta)) = \cos(5\arcsin(\sin(\theta))) = \cos(5\theta)$.
Or, si $\theta \in \left\{-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{10}, -\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{2}\right\}$, alors : $\cos(5\theta) = 0$ et $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Ainsi, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right)$, $\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$, $\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ sont des racines de P.
Or, la fonction sin est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Ces six racines sont donc distinctes.
Un polynôme de degré inférieur ou égal à 5 ne peut avoir plus de cinq racines.
On aboutit donc à une contradiction.
Ainsi, si un polynôme P est une solution de (E), alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $P(x) = \lambda(16x^5 - 20x^3 + 5x)$.
Réciproquement, supposons que $P(x) = \lambda(16x^5 - 20x^3 + 5x)$.
Nous savons déjà que P est solution de (E) sur $]-1, 1[$.
Or : $(1 - x^2)P''(x) - xP'(x) + k^2P(x)$ est un polynôme. Ce polynôme est donc nul sur $]-1, 1[$. Un polynôme non nul a un nombre fini de racine. Ce polynôme est donc nul sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, P est une solution de (E).

Les solutions polynomiales de (E) sont les fonctions de la forme :

$$\lambda(16x^5 - 20x^3 + 5x)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.