
Courbes - Équivalents

On se propose d'étudier la courbe (Γ) définie par :

$$\begin{cases} x(t) &= t \ln(1+t) \\ y(t) &= t^2 - t^3 \end{cases}$$

On note $M(t)$ le point de paramètre t .

Partie I : Préliminaires

1. Montrer qu'au voisinage de 0^+ , on a :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + x^3$$

et qu'au voisinage de 0^- , on a :

$$x - \frac{x^2}{2} + x^3 \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2}$$

Indication : Étudier des fonctions bien choisies.

2. En déduire un équivalent de $\ln(1+x) - x$ en 0.

Partie II : Étude de (Γ) .

1. Préciser le domaine de définition du paramétrage de (Γ) .
2. Étudier les variations de x et de y .
3. (a) Déterminer un équivalent de $x(t)$ et $y(t)$ en 0.

- (b) En déduire un vecteur tangent $\vec{u}$ à la courbe (Γ) en 0.

Indication : On choisira $\vec{u}$ avec des coordonnées entières.

- (c) Préciser les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v})$ soit une base orthogonale et directe et $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.
(d) Préciser les coordonnées $(X(t), Y(t))$ de $M(t)$ dans le repère $(M(0), \vec{u}, \vec{v})$.
(e) Déterminer des équivalents simples de $X(t)$ et $Y(t)$ en 0.
(f) Préciser alors le signe de X et de Y au voisinage de 0.
(g) En déduire la position relative de la courbe de (Γ) et de sa tangente en 0 au voisinage de 0.
4. (a) Donner un équivalent de $x(t)$ et $y(t)$ en $+\infty$.
(b) Étudier les branches infinies de (Γ) .
5. Tracer la courbe (Γ) (échelle : 2cm).
On représentera le repère $(M(0), \vec{u}, \vec{v})$.