Lycée Gustave Eiffel Année 2010-2011
Mathématiques PTSI DM n°5
A rendre le jeudi 17 février 2011

Application - Récurrences- Développements limités

Exercice 1. *Application injective ou surjective*

On se donne E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$.

1. On suppose uniquement pour cette question $f \circ f = f$.
   (a) Montrer que si f est injective, alors $f = \mathrm{Id}_E$.
   (b) Montrer que si f est surjective, alors $f = \mathrm{Id}_E$.
2. On suppose uniquement pour cette question $f \circ f \circ f = f$.
   Montrer que f est injective si, et seulement si, f est surjective.
   Que peut-on en déduire si f est injective ou surjective ?

Exercice 2. *Quelques sommes*

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. On note : $S_n^{(p)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^p$.

1. Rappeler les expressions de $S_n^{(0)}$ et de $S_n^{(1)}$ en fonction de n.
2. Montrer, par récurrence sur n, que : $S^{(2)}(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. (a) Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 - k^3$ en fonction de n puis en fonction de $S_n^{(2)}$, $S_n^{(1)}$ et $S_n^{(0)}$.
   (b) Retrouver l'expression de $S_n^{(2)}$ précédente.
4. En s'inspirant de la question précédente, calculer $S_n^{(3)}$ et $S_n^{(4)}$.
5. On note $T_n^{(p)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^p$.
   (a) Exprimer $T_n^{(p)}$ en fonction de $S_n^{(p)}$, $S_{2n}^{(p)}$ et p.
   (b) En déduire une expression de $T_n^{(2)}$ et $T_n^{(3)}$.
   (c) Enfin, écrire $T_n^{(2)}$ comme une somme de termes d'une suite arithmétique et retrouver l'expression précédente.

Exercice 3. *Étude d'une famille de fonctions.*

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit sur $\mathbb{R}^*$ la fonction f_λ par : $f_\lambda(x) = \dfrac{\mathrm{th}(x)}{e^x - 1} + \lambda(\sqrt{1+x^2} - 1)$.

1. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda < \mu$. Préciser la position relative des graphes de f_λ et de f_μ.
2. (a) Exprimer $\mathrm{th}(x)$ en fonction de e^{2x} et en déduire une expression simplifiée de $\dfrac{\mathrm{th}(x)}{e^x - 1}$.
   (b) Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{\mathrm{th}(x)}{e^x - 1}$.
   (c) En déduire le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f_λ.
   (d) Montrer que f_λ se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable. Préciser $f_\lambda(0)$ et $f'_\lambda(0)$.
   (e) En fonction de λ, préciser alors l'équation de la tangente de f en 0 et la position relative au voisinage de 0 entre le graphe de f et sa tangente.
   (f) Résumer cette étude en présentant un graphique donnant l'allure de f_λ au voisinage de 0 en fonction du paramètre λ.
3. (a) Montrer que : $\dfrac{\mathrm{th}(x)}{e^x - 1} = \underset{x \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et que : $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{\mathrm{th}(x)}{e^x - 1} = 0^+$.
   (b) Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que : $\sqrt{1+x^2} = ax + b + \dfrac{c}{x} + \underset{x \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$
   (c) En déduire que la fonction f_λ admet une asymptote dont on exprimera l'équation en fonction de λ. Préciser également la position relative du graphe de f et de son asymptote au voisinage de $+\infty$.
   (d) Résumer cette étude en présentant un graphique donnant l'allure de f_λ au voisinage de $+\infty$ en fonction du paramètre λ.