Exercice 1 : Application injective ou surjective

1. (a) On suppose que f est injective.
   Soit $x \in E$.
   On a : $f \circ f = f$.
   Donc : $f(f(x)) = f(x)$.
   Puisque l'application f est injective, on en déduit que : $f(x) = x$.
   D'où : $f = \mathrm{Id}_E$.
   $\boxed{\text{On en déduit que si } f \text{ est injective, alors } f = \mathrm{Id}_E.}$
   (b) On suppose que f est surjective.
   Soit $x \in E$.
   Puisque l'application f est surjective, il existe $x' \in E$ tel que $f(x') = x$.
   On a alors : $f(x) = f(f(x')) = f(x') = x$.
   D'où : $f = \mathrm{Id}_E$.
   $\boxed{\text{On en déduit que si } f \text{ est surjective, alors } f = \mathrm{Id}_E.}$
2. On raisonne par doubles implications.
   (a) <u>On suppose que f est injective.</u>
   Montrons que f est surjective.
   Soit $y \in E$.
   On cherche $x \in E$ tel que : $f(x) = y$.
   On a : $f(f(f(y))) = f(y)$.
   Puisque f est injective, on a : $f(f(y)) = y$.
   Donc : $x = f(y)$ convient.
   L'application f est donc surjective.
   (b) <u>On suppose que f est surjective.</u>
   Montrons que f est injective.
   Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que : $f(x_1) = f(x_2)$.
   Donc, il existe $x_1' \in E$ et $x_2' \in E$ tel que $x_1 = f(x_1')$ et $x_2 = f(x_2')$.
   On a donc : $x_1 = f(x_1') = f(f(f(x_1'))) = f(f(x_1))$
   $= f(f(x_2)) = f(f(f(x_2')))$
   $= f(x_2') = x_2$
   L'application f est donc injective.

   $\boxed{\text{L'application } f \text{ est donc injective si, et seulement si, elle est surjective.}}$

   On suppose que f est injective ou surjective.
   L'application f est alors injective et surjective. Elle est donc bijective.
   De plus, on a : $f \circ f \circ f = f$.
   D'où : $f \circ f = f \circ f \circ f \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_E$.
   Donc : $f^{-1} = f$.
   $\boxed{\text{Si } f \text{ est injective ou surjective, elle est alors bijective et } f^{-1} = f.}$
   Remarque 1. *Une telle application est également appelée une involution.*

Exercice 2 : Quelques sommes

1. On a : $S_n^{(0)} = \sum_{k=0}^{n} k^0 = \sum_{k=0}^{n} 1$.
   Donc : $\boxed{S_n^{(0)} = n + 1}$
   On a : $S_n^{(0)} = \sum_{k=0}^{n} k^1 = \sum_{k=0}^{n} k$.
   Donc : $\boxed{S_n^{(1)} = \dfrac{n(n+1)}{2}}$
2. Montrons, par récurrence sur n, que : $S^{(2)}(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $(\mathcal{P}_n)$.
   Initialisation : On a : $S_0^{(2)} = \sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0$
   et : $\dfrac{0(0+1)(2.0+1)}{6} = 0$.
   Donc : $S_0^{(2)} = \dfrac{0(0+1)(2.0+1)}{6}$.
   <u>La propriété $(\mathcal{P}_0)$ est donc vraie.</u>
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété $(\mathcal{P}_n)$.
   Montrons la propriété $(\mathcal{P}_{n+1})$.
   $$\begin{aligned} \text{On a : } S_{n+1}^{(2)} &= \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} \end{aligned}$$
   On en déduit : $(\mathcal{P}_{n+1})$.
   <u>La propriété est donc héréditaire.</u>
   $\boxed{\text{Nous avons donc établi : } \forall n \in \mathbb{N} \quad S_n^{(2)} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

3. (a) On calcule : $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3-k^3$.

On reconnaît une somme télescopique.

D'où : $\boxed{\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3-k^3=(n+1)^3}$

On a : $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3-k^3=\sum_{k=0}^{n}3k^2+3k+1=3\sum_{k=0}^{n}k^2+3\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}1$.

D'où : $\boxed{\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3-k^3=3S_n^{(2)}+3S_n^{(1)}+S_n^{(0)}}$

(b) On a donc : $S_n^{(2)}=\dfrac{(n+1)^3-3S_n^{(1)}-S_n^{(0)}}{3}=\dfrac{(n+1)^3-3\frac{n(n+1)}{2}-(n+1)}{3}$

$=\dfrac{(n+1)(2(n+1)^2-3n-2)}{6}=\dfrac{(n+1)(2n^2+n)}{6}$

Nous retrouvons donc : $\boxed{S_n^{(2)}=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

4. (a) Calculons $S_n^{(3)}$.

On étudie de $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4-k^4$.

D'un côté, on reconnaît une somme télescopique et on a donc : $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4-k^4=(n+1)^4$.

D'un autre côté par le binôme de Newton, on a :
$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4-k^4=\sum_{k=0}^{n}4k^3+6k^2+4k+1=4S_n^{(3)}+6S_n^{(2)}+4S_n^{(1)}+S_n^{(0)}$.

D'où : $S_n^{(3)}=\dfrac{1}{4}\left((n+1)^4-6S_n^{(2)}-4S_n^{(1)}-S_n^{(0)}\right)$.

$=\dfrac{1}{4}\left((n+1)^4-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-(n+1)\right)$

$=\dfrac{(n+1)}{4}\left((n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\right)$

$=\dfrac{(n+1)}{4}\left((n+1)^3-(n+1)(2n+1)\right)$

$=\dfrac{(n+1)^2}{4}\left((n+1)^2-(2n+1)\right)$

On en déduit : $\boxed{S_n^{(3)}=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}}$

Remarque 2. *On observe un propriété remarquable :* $S_n^{(3)}=\left(S_n^{(1)}\right)^2$.

(b) Calculons $S_n^{(4)}$.

On étudie de $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^5-k^5$.

D'un côté, on reconnaît une somme télescopique et on a donc :
$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^5-k^5=(n+1)^5$.

D'un autre côté par le binôme de Newton, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^5-k^5=\sum_{k=0}^{n}5k^4+10k^3+10k^2+5k+1$$
$$=5S_n^{(4)}+10S_n^{(3)}+10S_n^{(2)}+5S_n^{(1)}+S_n^{(0)}$$

D'où : $S_n^{(4)}=\dfrac{1}{5}\left((n+1)^5-10S_n^{(3)}-10S_n^{(2)}-5S_n^{(1)}-S_n^{(0)}\right)$

$$=\frac{1}{5}\left((n+1)^5-\frac{5n^2(n+1)^2}{2}-\frac{5n(n+1)(2n+1)}{3}-\frac{5n(n+1)}{2}-(n+1)\right)$$
$$=\frac{n+1}{30}\left(6((n+1)^4-1)-15n^2(n+1)-10n(2n+1)-15n\right)$$
$$=\frac{n+1}{30}\left(6(n^4+4n^3+6n^2+4n)-15n^3-35n^2-25n\right)$$

On en déduit que : $\boxed{S_n^{(4)}=\dfrac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}}$

5. (a) On a : $T_n^{(p)}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{2k}(2k)^p+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{2k+1}(2k+1)^p$

$$=2^p\sum_{k=0}^{n}k^p-\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^p$$
$$=2^p\sum_{k=0}^{n}k^p-\left(\sum_{k=0}^{n}(2k)^p+\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^p\right)+\sum_{k=0}^{n}(2k)^p$$
$$=2.2^p\sum_{k=0}^{n}k^p-\sum_{k=0}^{2n}k^p$$

D'où : $\boxed{T_n^{(p)}=2^{p+1}S_n^{(p)}-S_{2n}^{(p)}}$

(b) Par la question 3.(b) et la question précédente, on obtient :
$T_n^{(2)}=2^3\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\dfrac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}=\dfrac{n(2n+1)(8n+8-8n-2)}{6}$.

D'où : $\boxed{T_n^{(2)} = n(2n+1)}$

Par la question 4.(a) et la question précédente, on a :

$T_n^{(3)} = 2^4\dfrac{n^2(n+1)^2}{4} - \dfrac{(2n)^2(2n+1)^2}{4} = n^2(4n^2+8n+4-(4n^2+4n+1))$.

D'où : $\boxed{T_n^{(3)} = n^2(4n+3)}$

(c) On a :
$$\begin{aligned}
T_n^{(2)} &= \sum_{k=0}^{n}(2k)^2 - \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^2 \\
&= 0 + \sum_{k'=0}^{n-1}(2k'+2)^2 - \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^2 \qquad (k'=k-1) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}((2k+2)^2-(2k+1)^2) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} 4k+3
\end{aligned}$$

Ainsi, $T_n^{(2)}$ est la somme des termes du rang 0 au rang $n-1$ de la suite arithmétique de raison 4 de premier terme 3.

D'où : $T_n^{(2)} = \dfrac{n(4(n-1)+3+3)}{2} = \dfrac{n(4n+2)}{2}$.

On retrouve donc : $\boxed{T_n^{(2)} = n(2n+1)}$

Exercice 3 : Étude d'une famille de fonctions.

---

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

   On a :
   $$\begin{aligned}
   f_\lambda(x) - f_\mu(x) &= \left(\frac{\mathrm{th}(x)}{e^x-1} + \lambda(\sqrt{1+x^2}-1)\right) - \left(\frac{\mathrm{th}(x)}{e^x-1} + \mu(\sqrt{1+x^2}-1)\right) \\
   &= (\lambda-\mu)(\sqrt{1+x^2}-1)
   \end{aligned}$$
   Or : $\sqrt{1+x^2} > 1$ $(x \neq 0)$ et $\lambda - \mu < 0$.

   Donc : $f_\lambda(x) - f_\mu(x) < 0$.

Le graphe de f_λ est strictement en-dessous de celui de f_μ.

2. (a) D'après le cours, on a : $\boxed{\mathrm{th}(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}$

   Or : $e^{2x}-1 = (e^x-1)(e^x+1)$.

   Donc : $\boxed{\dfrac{\mathrm{th}(x)}{e^x-1} = \dfrac{e^x+1}{e^{2x}+1}}$.

   (b) On a : $1+e^x = 2+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)$.

   Donc :
   $$\begin{aligned}
   1+e^{2x} &= 2+(2x)+\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}(x^3) \\
   &= 2+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3)
   \end{aligned}$$
   D'où : $\dfrac{1}{1+e^{2x}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3)}$.

   Or :
   $$\begin{aligned}
   \frac{1}{1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3)} &= 1-(x+x^2+\frac{2}{3}x^3)+(x+x^2+\frac{2}{3}x^3)^2 \\
   &\quad -(x+x^2+\frac{2}{3}x^3)^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3) \\
   &= 1-x-x^2-\frac{2}{3}x^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3) \\
   &\qquad\quad +x^2+2x^3 \\
   &\qquad\qquad\quad -x^3 \\
   &= 1-x+\frac{x^3}{3}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)
   \end{aligned}$$
   D'où : $\dfrac{1}{1+e^{2x}} = \dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)$

   On obtient donc :
   $$\begin{aligned}
   \frac{\mathrm{th}(x)}{e^x-1} &= (2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)) \\
   &\quad (\frac{1}{2}-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)) \\
   &= 1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+\underset{x\to 0}{o}(x^3) \\
   &\quad -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{4} \\
   &\quad +\frac{1}{3}x^3
   \end{aligned}$$
   On obtient ainsi : $\boxed{\dfrac{\mathrm{th}(x)}{e^x-1} = 1-\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)}$

   (c) On a : $\sqrt{1+u} = 1+\dfrac{1}{2}u+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-1\right)\dfrac{u^2}{2}+\underset{u\to 0}{o}(u^2)$.

   Donc : $\sqrt{1+x^2}-1 = \dfrac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^3)$.

   D'où : $f_\lambda(x) = \left(1-\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)+\lambda(\dfrac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^3))$.

   On obtient ainsi : $\boxed{f_\lambda(x) = 1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{2\lambda-1}{4}x^2+\dfrac{x^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)}$

   (d) D'après le développement limité de f_λ, on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f_\lambda(x) = 1$.

$$\boxed{\text{On peut donc prolonger par continuité la fonction } f_\lambda \text{ en 0 par : } f_\lambda(0) = 1.}$$

On a alors : $f_\lambda(x) = f_\lambda(0) - \dfrac{x}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x)$

$$\boxed{\text{Ainsi prolongée, la fonction } f_\lambda \text{ est donc dérivable et } f'_\lambda(0) = -\dfrac{1}{2}.}$$

(e) $\boxed{\text{L'équation de la tangente de } f_\lambda \text{ en 0 est : } y = 1 - \dfrac{x}{2}.}$

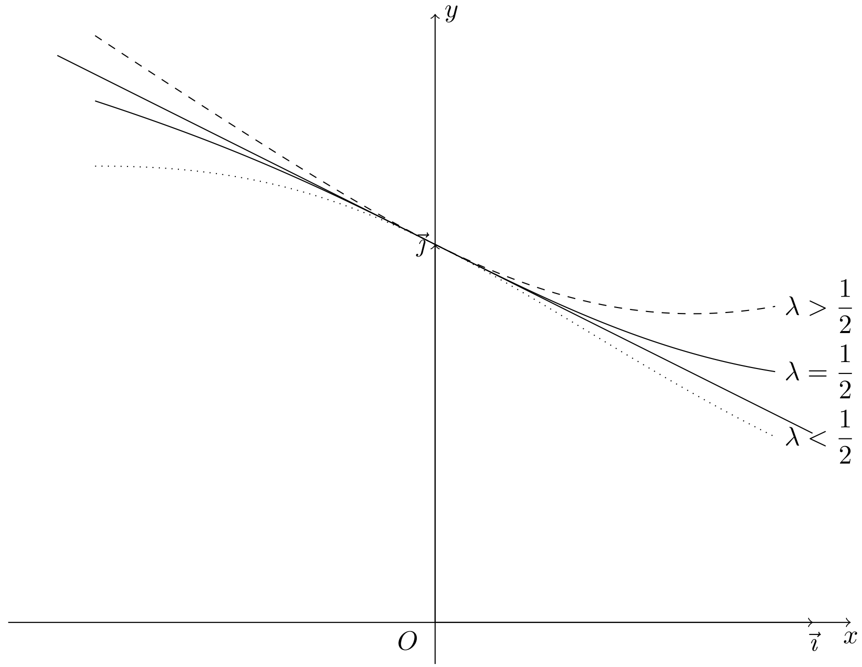
La position du graphe de f_λ par rapport à sa tangente est donnée par le signe de $\dfrac{2\lambda - 1}{4}x^2 + \dfrac{x^3}{6}$ au voisinage de 0.

Or : $\begin{cases} \dfrac{2\lambda-1}{4} > 0 \text{ si } \lambda > \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2\lambda-1}{4} < 0 \text{ si } \lambda < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2\lambda-1}{4} = 0 \text{ si } \lambda = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

En particulier, si $\lambda = \dfrac{1}{2}$, la position du graphe de f_λ par rapport à sa tangente est donnée par le signe de $\dfrac{x^3}{6}$ au voisinage de 0.

> On en déduit qu'au voisinage de 0, on a :
>
> i. si $\lambda > \dfrac{1}{2}$, f_λ est au-dessus de sa tangente
>
> ii. si $\lambda < \dfrac{1}{2}$, f_λ est en-dessous de sa tangente
>
> iii. si $\lambda = \dfrac{1}{2}$, f_λ est en-dessous de sa tangente en 0^- et au-dessus en 0^+

(f) On a le schéma suivant :



3. (a) On a : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \text{th}(x) = 1$.

Et : $e^x - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$.

Donc : $\dfrac{\text{th}(x)}{e^x - 1} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$.

Or : $e^{-x} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} e^{-x} = 0^+$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \begin{cases} \dfrac{\text{th}(x)}{e^x - 1} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right) \\ \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{\text{th}(x)}{e^x - 1} = 0^+ \end{cases}}$$

(b) On a : $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2}\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}$.

Au voisinage de $+\infty$, on a : $\sqrt{x^2+1} = x\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}$.

Or : $\sqrt{1+u} = 1 + \dfrac{u}{2} + \underset{u\to 0}{o}(u)$.

et : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

D'où : $\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1 + \frac{1}{2x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

On en déduit : $\boxed{\sqrt{1+x^2} = x + \frac{1}{2x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)}$

(c) D'autre part, on a : $\frac{\mathrm{th}(x)}{e^x-1} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Par conséquent, on obtient : $f_\lambda(x) = \lambda x - \lambda + \frac{\lambda}{2x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$.

> On en déduit que le graphe de la fonction f_λ admet une asymptote en $+\infty$ d'équation : $y = \lambda x - \lambda$.

Si $\lambda \neq 0$, la position relative entre le graphe de la fonction f_λ et son asymptote est donnée par le signe de $\frac{\lambda}{2x}$.

Si $\lambda = 0$, on a : $f_\lambda(x) = \frac{\mathrm{th}(x)}{e^x-1}$.

Or : $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\mathrm{th}(x)}{e^x-1} = 0^+$.

> On en déduit :
> i. Si $\lambda \geq 0$, le graphe de f_λ est au-dessus de son asymptote.
> ii. Si $\lambda < 0$, le graphe de f_λ est en-dessous de son asymptote.

(d) On a le schéma suivant :