Lycée Gustave Eiffel Année 2010-2011
Mathématiques PTSI DM n°6
A rendre le lundi 7 mars 2011

Une courbe - Un groupe - Une fonction

Exercice 1. *Étude d'une courbe*

On considère la courbe Γ définie par :

$$\begin{cases} x(t) = t - \ln(1+t) \\ y(t) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+t^2}{1-t^2}\right) \end{cases}$$

1. Préciser le domaine de définition D du paramétrage de Γ.
2. Étudier les variations des fonctions x et y et préciser les limites de x et de y au bord de D.
3. Montrer que Γ admet un unique point stationnaire et étudier la nature de ce point stationnaire. En particulier, préciser un vecteur directeur de la tangente à la courbe Γ en ce point.
4. Montrer que Γ admet deux asymptotes que l'on déterminera et préciser la position relative de Γ et de ses asymptotes au voisinage des paramètres correspondants.
5. Tracer la courbe avec une grande précision (échelle 2cm).

Exercice 2. *Étude d'un groupe*

Sur $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on définit une opération notée $\top$ telle que :

$$\forall((x,y),(x',y')) \in G^2 \quad (x,y)\top(x',y') = (xx' - yy', xy' + yx')$$

1. (a) Vérifier que $\top$ est bien une loi de composition interne sur G.
   (b) Montrer que G muni de la loi $\top$ est un groupe. Est-il commutatif ?
2. On pose : $H = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R}^*\}$. Montrer que H est un sous-groupe de G.
3. On définit f l'application de G dans $\mathbb{R}^{+*}$ par la formule : $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
   (a) Montrer f est un morphisme de groupe de G muni de $\top$ vers $\mathbb{R}^{+*}$ muni de la multiplication.
   (b) L'application f est-elle un isomorphisme ?

Problème 1. *Étude de la solution d'une équation différentielle.*

Dans tout le problème, on considère les fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \qquad \text{et} \qquad t(x) = \frac{1}{\operatorname{th}(x)} - \frac{1}{x}$$

Partie I : Prolongement de f et t.

1. (a) Préciser le domaine de définition de f.
   (b) Calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.
   (c) En déduire que f se prolonge en 0 en une fonction dérivable. Préciser $f(0)$ et $f'(0)$.
   (d) Donner l'équation de la tangente de f en 0 ainsi que la position relative du graphe de f par rapport à sa tangente en 0.
   (e) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
   Indication : On rappelle qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est une fonction dérivable dont la dérivée est continue.
2. (a) Préciser le domaine de définition de t.
   (b) Calculer le développement limité de t en 0 à l'ordre 3.
   (c) En déduire que t se prolonge en 0 en une fonction dérivable. Préciser $t(0)$ et $t'(0)$.
   (d) Donner l'équation de la tangente de t en 0 ainsi que la position relative du graphe de t par rapport à sa tangente en 0.
   (e) Montrer que t est de classe $\mathcal{C}^1$.

Partie II : Étude de f.

On considère la fonction $g(x) = xe^x - e^x + 1$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction g et en déduire le signe de g.
2. En déduire les variations de f.
3. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. Montrer que le graphe de f admet des asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$. Préciser la position relative du graphe de f par rapport à ses asymptotes.
5. Tracer le graphe de f.

Partie III : Écriture hyperbolique de f.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^* \ f(x) = \dfrac{x}{2}\left(\dfrac{1}{\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)} - 1\right)$.
2. Soit f_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = f(x) - 1 + \dfrac{x}{2}$.
   (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \ f_1(x) = \dfrac{x}{2} t\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
   (b) Montrer que la fonction f_1 est paire.
   (c) Quelle interprétation géométrique en termes d'aires peut-on déduire pour le graphe de f ?

Partie IV : Étude d'une équation différentielle.

On se propose d'étudier l'équation différentielle :

$$(e^x - 1)y' + e^x y = 1 \quad (E)$$

1. Déterminer les intervalles de résolution de l'équation (E) et résoudre l'équation (E) sur chacun de ces intervalles.
2. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution (dérivable) définie sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.