Polynômes - Algèbre linéaire

Problème 1. *Solutions d'une équation*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$X^4 + nX - n = 0 \quad (E_n)$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (E_n) admet exactement deux solutions réelles $\alpha_n \in \mathbb{R}^+$ et $\beta_n \in \mathbb{R}^-$.
2. **Étude de la suite** $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$
 - (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq \alpha_n \leq 1$.
 - (b) Déterminer le signe de $P_{n+1}(\alpha_n)$ et en déduire que la suite (α_n) est croissante.
 - (c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite a_1 .
 - (d) Déterminer $(b_1, c_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\alpha_n = a_1 + \frac{b_1}{n} + \frac{c_1}{n^2} + o_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$.
3. **Étude de la suite** $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$
 - (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad -\sqrt[3]{n} - 1 \leq \beta_n \leq \sqrt[3]{n}$.
 - (b) En déduire que : $\beta_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\sqrt[3]{n}$.
 - (c) On pose : $\beta'_n = \beta_n + \sqrt[3]{n}$.
Montrer que β'_n est solution d'une équation de degré 4 que l'on précisera en fonction de n .
 - (d) Montrer que la suite $(\beta'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée et en déduire que $(\beta'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $-\frac{1}{3}$.
 - (e) En déduire qu'il existe $(a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\beta'_n = -\frac{1}{3} + \frac{a_2}{\sqrt[3]{n}} + \frac{b_2}{\sqrt[3]{n^2}} + o_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \right)$
 - (f) En déduire un développement asymptotique de β_n .
4. **Étude des solutions imaginaires**
 - (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (E_n) admet exactement deux solutions imaginaires z_n et w_n . Quelle relation relie z_n et w_n ?
On suppose dorénavant que z_n est la solution de (E_n) de partie imaginaire positive.
Soit $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z_n = x_n + iy_n$.
 - (b) Exprimer x_n et $|z_n|^2$ en fonction de α_n, β_n et n .
 - (c) Déterminer $(a_3, b_3, c_3, d_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $x_n = a_3 \sqrt[3]{n} + b_3 + \frac{c_3}{\sqrt[3]{n}} + \frac{d_3}{\sqrt[3]{n^2}} + o_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \right)$
 - (d) Déterminer $(a_4, b_4, c_4, d_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $y_n = a_4 \sqrt[3]{n} + b_4 + \frac{c_4}{\sqrt[3]{n}} + \frac{d_4}{\sqrt[3]{n^2}} + o_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \right)$

Exercice 1. *Plans et droites vectoriels de $\mathbb{R}^3$*

1. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que l'ensemble $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / ax + by + cz = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x + 2y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$.
Déterminer une famille génératrice de $F \cap G$.
3. Déterminer un sous-espace vectoriel H de F supplémentaire à $F \cap G$, i.e. tel que : $F = (F \cap G) \oplus H$.
Indication : On fera une représentation graphique en trois dimension de la situation.
4. Montrer alors que $\mathbb{R}^3 = H \oplus G$.

Exercice 2. *Un morphisme polynomial*

On considère l'application suivante :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto X(P(X+1) - P(X)) \end{cases}$$

1. Montrer que l'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, déterminer le terme de plus haut degré de $\phi(P)$ en fonction du degré de P et de son coefficient de plus haut degré.
3. Déterminer $\ker(\varphi)$.
4. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère l'équation :

$$\varphi(P) = \lambda P \quad (\mathcal{E}_\lambda)$$

- (a) Montrer que l'ensemble E_λ des solutions de $(\mathcal{E}_\lambda)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
 - (b) Montrer que si $E_\lambda \neq \{0\}$, alors $\lambda \in \mathbb{N}$ et préciser le degré des éléments non nuls de E_λ .
 - (c) Montrer que si $E_\lambda \neq \{0\}$, alors E_λ est engendré par un unique polynôme unitaire.
5. On se propose de déterminer les sous-espaces vectoriels E_n .
- (a) Montrer que E_0, E_1, E_2 et E_3 sont engendrées par, respectivement, P_0, P_1, P_2 et P_3 des polynômes unitaires.
 - (b) Factoriser les polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3 .
 - (c) En s'inspirant de ces exemples, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est engendré par un polynôme P_n unitaire que l'on précisera.
- Indication :** On pourra faire une récurrence et exploiter une relation de récurrence reliant les polynômes P_n et P_{n+1} .