Lycée Gustave Eiffel Année 2010-2011
Mathématiques PTSI 2 Devoir maison n°7
Rendu le 2 mai 2011

Problème 1 : Solutions d'une équation

1. Soit P_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad P_n(x) = x^4 + nx - n$.
La fonction P_n est une fonction polynomiale. Elle est donc dérivable.
On a : $P_n'(x) = 4x^3 + n$.
Donc : $P_n'(x) \geq 0 \iff x^3 \geq -\dfrac{n}{4} \iff x \geq -\sqrt[3]{\dfrac{n}{4}}$.
On a : $P_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^4$ et $P_n(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^4$.
Donc : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} P_n(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} P_n(x) = +\infty$.
De plus : $P_n\left(-\sqrt[3]{\dfrac{n}{4}}\right) = \left(-\sqrt[3]{\dfrac{n}{4}}\right)^4 - n\sqrt[3]{\dfrac{n}{4}} - n = -\dfrac{3n}{4}\sqrt[3]{\dfrac{n}{4}} - n$.
On en déduit le tableau de variations de la fonction P_n.

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{\frac{n}{4}}$		0		$+\infty$
$P_n'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$P_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{3n}{4}\sqrt[3]{\frac{n}{4}} - n$	$\nearrow$	$-n$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction P_n est continue et strictement croissante sur $\left[-\sqrt[3]{\dfrac{n}{4}} + \infty\right[$. Donc, d'après les limites de P_n, on en déduit par le théorème de la bijection que P_n est un bijection croissante de $\left[-\sqrt[3]{\dfrac{n}{4}}, +\infty\right[$ dans $\left[-\dfrac{3n}{4}\sqrt[3]{\dfrac{n}{4}} - n, +\infty\right[$.
Or, $0 \in \left[-\dfrac{3n}{4}\sqrt[3]{\dfrac{n}{4}} - n, +\infty\right[$. De plus, $P_n(0) = -n < 0$.
La fonction P_n s'annule donc en un seul point α_n de $\left[-\dfrac{3n}{4}\sqrt[3]{\dfrac{n}{4}} - n, +\infty\right[$. De plus, $\alpha_n > 0$.
De même, P_n est une bijection décroissante de $\left]-\infty, -\sqrt[3]{\dfrac{n}{4}}\right]$ dans $\left[-\dfrac{3n}{4}\sqrt[3]{\dfrac{n}{4}} - n, +\infty\right[$.

La fonction P_n s'annule donc en un seul point β_n de $\left]-\infty, -\sqrt[3]{\dfrac{n}{4}}\right]$.
Or : $-\sqrt[3]{\dfrac{n}{4}} < 0$. Donc $\beta_n < 0$.

$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*\text{, l'équation } (E_n) \text{ admet donc exactement deux solutions réelles } \alpha_n \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \beta_n \in \mathbb{R}^-.}$

2. **Étude de la suite** $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
   (a) On a :$P_n(0) = -n$ et $P_n(1) = 1$.
   De plus, la fonction P_n est continue.
   Par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction P_n s'annule dans l'intervalle $[0, 1]$. On en déduit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq \alpha_n \leq 1}$
   (b) On a : $P_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n^4 + (n+1)\alpha_n - (n+1) = P_n(\alpha_n) + \alpha_n - 1 = \alpha_n - 1$.
   Or : $\alpha_n \leq 1$.
   D'où : $\boxed{P_{n+1}(\alpha_n) \leq 0}$.
   Or : $P_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$ et P_{n+1} est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
   Donc : $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$.
   $\boxed{\text{La suite } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc une suite croissante.}}$
   (c) La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1. Donc, la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note a_1 sa limite.
   On a : $\alpha_n^4 + n\alpha_n - n = 0$. Donc : $\alpha_n = 1 - \dfrac{\alpha_n^4}{n}$.
   Puisque la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on a : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{\alpha_n^4}{n} = 0$.

   $\boxed{\text{On en déduit que la suite } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers 1.}}$
   (d) On a : $\alpha_n = 1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.
$$\text{Donc : } \alpha_n = 1 - \frac{\left(1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)^4}{n} = 1 - \frac{1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)}{n} = 1 - \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$\text{D'où : } \alpha_n = 1 - \frac{\left(1 - \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^4}{n}. = 1 - \frac{1 - \frac{4}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)}{n}$$

$$\boxed{\text{On en déduit } : \alpha_n = 1 - \frac{1}{n} + \frac{4}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

3. **Étude de la suite** $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

(a) On a : $P_n(-\sqrt[3]{n}) = n\sqrt[3]{n} - n\sqrt[3]{n} - n = -n < 0$

et : $P_n(-\sqrt[3]{n}-1) = n\sqrt[3]{n} + 4n + 6\sqrt[3]{n^2} + 4\sqrt[3]{n} + 1 - n\sqrt[3]{n} - n - n$

$$= 2n + 6\sqrt[3]{n^2} + 4\sqrt[3]{n} + 1 > 0$$

Or, la fonction P_n est continue. Par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction P_n s'annule dans l'intervalle $\left[-\sqrt[3]{n}-1, -\sqrt[3]{n}\right]$.

On en déduit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad -\sqrt[3]{n}-1 \leq \beta_n \leq -\sqrt[3]{n}}$

(b) On a donc : $-1 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} \leq \dfrac{\beta_n}{\sqrt[3]{n}} \leq -1$.

Or : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} -1 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} = -1$.

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{\beta_n}{\sqrt[3]{n}} = -1$.

D'où : $\boxed{\beta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\sqrt[3]{n}}$

(c) On a : $\beta_n = -\sqrt[3]{n} + \beta'_n$.

Donc : $P_n(\beta_n) = P_n(-\sqrt[3]{n} + \beta'_n)$

$$\begin{aligned}
&= \left(-\sqrt[3]{n} + \beta'_n\right)^4 + n\left(-\sqrt[3]{n} + \beta'_n\right) - n \\
&= n\sqrt[3]{n} - 4n\beta' n + 6\sqrt[3]{n^2}\beta'^2_n - 4\sqrt[3]{n}\beta'^3_n + \beta'^4_n - n\sqrt[3]{n} + n\beta'_n - n \\
&= \beta'^4_n - 4\sqrt[3]{n}\beta'^3_n + 6\sqrt[3]{n^2}\beta'^2_n - 3n\beta'_n - n
\end{aligned}$$

Or, β_n est une racine de P_n.

> Le nombre β'_n est donc solution de l'équation polynomiale suivante :
> $$X^4 - 4\sqrt[3]{n}X^3 + 6\sqrt[3]{n^2}X^2 - 3nX - n$$

(d) On a : $-\sqrt[3]{n} - 1 \leq \beta_n \leq -\sqrt[3]{n}$.

Donc : $-1 \leq \beta'_n = \beta_n + \sqrt[3]{n} \leq 0$.

$\boxed{\text{La suite } (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est donc bornée par } -1 \text{ et } 0.}$

On a : $\beta'^4_n - 4\sqrt[3]{n}\beta'^3_n + 6\sqrt[3]{n^2}\beta'^2_n - 3n\beta'_n - n = 0$.

Donc :
$$\beta'_n = \frac{\beta'^4_n - 4\sqrt[3]{n}\beta'^3_n + 6\sqrt[3]{n^2}\beta'^2_n - n}{3n} = \frac{\beta'^4_n}{3n} - \frac{4\beta'^3_n}{3\sqrt[3]{n^2}} + \frac{2\beta'^2_n}{\sqrt[3]{n}} - \frac{1}{3} \quad (\star)$$

Puisque la suite $(\beta'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, les suites $(\beta'^2_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(\beta'^3_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\beta'^4_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ le sont également.

On en déduit que : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{\beta'^4_n}{3n} - \dfrac{4\beta'^3_n}{3\sqrt[3]{n^2}} + \dfrac{2\beta'^2_n}{\sqrt[3]{n}} = 0$.

$\boxed{\text{La suite } (\beta'_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge donc vers } -\frac{1}{3}.}$

(e) On a : $\beta'_n = -\dfrac{1}{3} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

Donc : $\dfrac{\beta'^4_n}{3n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$

et : $\dfrac{4\beta'^3_n}{3\sqrt[3]{n^2}} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$.

Par la relation $(\star)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\beta'_n &= \frac{2\left(-\frac{1}{3} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)^2}{\sqrt[3]{n}} - \frac{1}{3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) \\
&= -\frac{1}{3} + \frac{2}{9\sqrt[3]{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)
\end{aligned}$$

D'où :
$$\begin{aligned}
\beta'_n &= -\frac{4\left(-\frac{1}{3} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)^3}{3\sqrt[3]{n^2}} + \frac{2\left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{9\sqrt[3]{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right)^2}{\sqrt[3]{n}} \\
&\quad - \frac{1}{3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right) \\
&= \frac{4}{81\sqrt[3]{n^2}} + \frac{2}{9\sqrt[3]{n}} - \frac{8}{27\sqrt[3]{n^2}} - \frac{1}{3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit : $\boxed{\beta'_n = -\frac{1}{3} + \frac{2}{9\sqrt[3]{n}} - \frac{20}{81\sqrt[3]{n^2}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)}$

(f) On a : $\beta_n = -\sqrt[3]{n} + \beta'_n$.

D'où : $\boxed{\beta_n = -\sqrt[3]{n} - \frac{1}{3} + \frac{2}{9\sqrt[3]{n}} - \frac{20}{81\sqrt[3]{n^2}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)}$

4. **Étude des solutions imaginaires**

(a) L'équation (E_n) admet exactement deux solutions réelles α_n et β_n. De plus, d'après l'étude des variations de P_n sur $\mathbb{R}$, on a : $P'_n(\alpha_n) \neq 0$ et $P'_n(\beta_n) \neq 0$. Ces deux solutions sont donc simples.

Or l'équation (E_n) est une équation polynomiale de degré 4. Elle admet donc quatre solutions comptées avec leur multiplicité.

L'équation admet donc au moins une solution imaginaire z_n. Puisque l'équation (E_n) est réelle, $\bar{z}_n$ est une autre solution imaginaire de (E_n).

Nous avons donc les quatre solutions de (E_n).

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{L'équation } (E_n) \text{ admet donc exactement deux solutions imaginaires} \\ z_n \text{ et } w_n \text{ tels que } : w_n = \bar{z}_n.\end{array}}$$

(b) D'après les relations coefficients-racines appliquées à l'équation (E_n), on a :

$$\begin{cases} \alpha_n + \beta_n + z_n + \bar{z}_n = 0 \\ \alpha_n\beta_n + \alpha_n z_n + \alpha_n \bar{z}_n + \beta_n z_n + \beta_n \bar{z}_n + z_n\bar{z}_n \\ \qquad = \alpha_n\beta_n + (\alpha_n+\beta_n)(z_n+\bar{z}_n) + z_n\bar{z}_n = 0 \\ \alpha_n\beta_n z_n + \alpha_n\beta_n\bar{z}_n + \alpha_n z_n\bar{z}_n + \beta_n z_n \bar{z}_n \\ \qquad = \alpha_n\beta_n(z_n+\bar{z}_n) + (\alpha_n+\beta_n)z_n\bar{z}_n = -n \\ \alpha_n\beta_n z_n\bar{z}_n = -n \end{cases}$$

Or : $z_n + \bar{z}_n = 2\mathrm{Re}(z_n) = 2x_n$.

D'où : $\begin{cases} \alpha_n + \beta_n + 2x_n = 0 \\ \alpha_n\beta_n + 2(\alpha_n+\beta_n)x_n + |z_n|^2 = 0 \\ 2\alpha_n\beta_n x_n + (\alpha_n+\beta_n)|z_n|^2 = -n \\ \alpha_n\beta_n |z_n|^2 = -n \end{cases}$

On a donc : $\boxed{x_n = -\dfrac{\alpha_n+\beta_n}{2}}$ Or : $|z_n|^2 = -\alpha_n\beta_n - 2x_n(\alpha_n+\beta_n)$.

D'où : $\boxed{|z_n|^2 = -\alpha_n\beta_n + (\alpha_n+\beta_n)^2 = \alpha_n^2 + \alpha_n\beta_n + \beta_n^2}$

(c) On a : $\alpha_n + \beta_n = \left(1 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)\right) - \sqrt[3]{n} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{9\sqrt[3]{n}}$

$$- \frac{20}{81\sqrt[3]{n^2}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$$

$$= -\sqrt[3]{n} + \frac{2}{3} + \frac{2}{9\sqrt[3]{n}} - \frac{20}{81\sqrt[3]{n^2}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$$

D'où : $\boxed{x_n = \dfrac{\sqrt[3]{n}}{2} - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9\sqrt[3]{n}} + \dfrac{10}{81\sqrt[3]{n^2}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)}$

(d) On a : $(\alpha_n+\beta_n)^2 = \left(-\sqrt[3]{n} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{9\sqrt[3]{n}} - \dfrac{20}{81\sqrt[3]{n^2}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)\right)^2$

$$= \sqrt[3]{n^2} - \frac{4\sqrt[3]{n}}{3} + \left(\frac{4}{9} - \frac{4}{9}\right)$$

$$+ \left(\frac{40}{81} + \frac{8}{27}\right)\frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$$

$$= \sqrt[3]{n^2} - \frac{4\sqrt[3]{n}}{3} + \frac{64}{81\sqrt[3]{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$$

et : $\alpha_n\beta_n = \left(1 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)\right)\left(-\sqrt[3]{n} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{9\sqrt[3]{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right)$

$$= -\sqrt[3]{n} - \frac{1}{3} + \frac{2}{9\sqrt[3]{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$$

Or : $y_n^2 = |z_n|^2 - x_n^2$

$$= -\alpha_n\beta_n + (\alpha_n+\beta_n)^2 - \left(-\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}\right)^2$$

$$= -\alpha_n\beta_n + \frac{3}{4}(\alpha_n+\beta_n)^2$$

D'où : $y_n^2 = \sqrt[3]{n} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{9\sqrt[3]{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$

$$+ \frac{3\sqrt[3]{n^2}}{4} - \sqrt[3]{n} + \frac{16}{27\sqrt[3]{n}}$$

$$= \frac{3\sqrt[3]{n^2}}{4} + \frac{1}{3} + \frac{10}{27\sqrt[3]{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$$

Donc : $y_n = \sqrt{\dfrac{3\sqrt[3]{n^2}}{4} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{10}{27\sqrt[3]{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)}$.

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{n}\sqrt{1 + \frac{4}{9\sqrt[3]{n^2}} + \frac{40}{81n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)}$$

On pose : $u = \dfrac{4}{9\sqrt[3]{n^2}} + \dfrac{40}{81n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

On a : $\sqrt{1+u} = 1 + \dfrac{u}{2} - \dfrac{u^2}{8} + \underset{u\to 0}{o}(u^2)$.

Or : $u^2 = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Donc : $y_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{n}\left(1 + \dfrac{2}{9\sqrt[3]{n^2}} + \dfrac{20}{81n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$

D'où : $\boxed{y_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{n} + \dfrac{\sqrt{3}}{9\sqrt[3]{n}} + \dfrac{10}{81\sqrt[3]{n^2}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)}$

Exercice 1 : Plans et droites vectoriels de $\mathbb{R}^3$

---

1. Montrons que l'ensemble E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   L'ensemble E est, par définition, un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$.
   On a : $a.0 + b.0 + c.0 = 0$.
   Donc : $(0,0,0) \in E$ et : $E \neq \emptyset$. Soient $u = (x_1, y_1, z_1) \in E$, $v = (x_2, y_2, z_2) \in E$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
   On a : $\alpha u + \beta v = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$.

Or : $a(\alpha x_1+\beta x_2)+b(\alpha y_1+\beta y_2)+c(\alpha z_1+\beta z_2)$
$= \alpha(ax_1+by_1+cz_1)+\beta(ax_2+by_2+cz_2)$.
On a : $u \in E$. Donc : $ax_1+by_1+cz_1=0$.
On a également : $v \in E$. Donc : $ax_2+by_2+cz_2=0$.
D'où : $a(\alpha x_1+\beta x_2)+b(\alpha y_1+\beta y_2)+c(\alpha z_1+\beta z_2)=\alpha.0+\beta.0=0$.
Donc : $\alpha u+\beta v \in E$.

$\boxed{\text{L'ensemble } E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3.}$

2. Par la question précédente appliquée à $(a,b,c)=(3,2,1)$ et $(a,b,c)=(1,1,1)$, les ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. L'ensemble $F\cap G$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\text{On a : } (x,y,z)\in F\cap G \iff \begin{cases} 3x+2y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$
$$\underset{L_1\leftarrow 3L_2-L_1}{\iff} \begin{cases} y+2z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y=-2z \\ x=z \end{cases}$$
$$\iff (x,y,z)=(z,-2z,z)=z(1,-2,1)$$

On en déduit : $\boxed{F\cap G=\text{vect}(1,-2,1)}$

3.

Remarque 0.1. *Les ensembles F et G sont des plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Leur intersection $F\cap G$ est une droite vectorielle. Toute droite vectorielle inclue dans F et distincte de $F\cap G$ est supplémentaire à $F\cap G$ dans F.*

Soit $H=\text{vect}(0,1,-2)$.
On a : $3.0+2.1+(-2)=0$. Donc : $(0,1,-2)\in F$. D'où : $H\subset F$.
On note : $v_1=(1,-2,1)$ et $v_2=(0,1,-2)$.
Montrons que $F=(F\cap G)\oplus H$.
Soit $u=(x,y,z)\in F$.
Il suffit de montrer que l'équation $u=u_1+u_2$ (E) où $u_1\in F\cap G$ et $u_2\cap G$ admet une unique solution.
Il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $u_1=\alpha v_1$ et $u_2=\beta v_2$.
On a : $u_1+u_2=\alpha v_1+\beta v_2=(\alpha,-2\alpha+\beta,\alpha-2\beta)$.

$$\text{Donc : } (E) \iff \begin{cases} \alpha=x \\ -2\alpha+\beta=y \\ \alpha-2\beta=z \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \alpha=x \\ \beta=y+2x \\ x-2(y+2x)=z \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \alpha=x \\ \beta=y+2x \\ 3x+2y+z=0 \end{cases}$$

Or : $u\in F$. Donc : $3x+2y+z=0$.

$$\text{D'où : } (E) \iff \begin{cases} \alpha=x \\ \beta=y+2x \end{cases} \iff \begin{cases} u_1=xv_1 \\ u_2=(y+2x)v_2 \end{cases}.$$

L'équation (E) admet donc une unique solution.

$\boxed{\text{On en déduit que } F=(F\cap G)\oplus H \text{ et donc } H=\text{vect}(0,1,-2) \text{ convient.}}$

4. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
Il suffit de montrer que l'équation $u=u_1+u_2$ (E) où $u_1\in H$ et $u_2\in G$ admet une unique solution.
Il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que : $u_1=\alpha v_2$. On a alors : $u_1(0,\alpha,-2\alpha)$
Soit (x_2,y_2,z_2) les coordonnées de u_2. On a : $x_2+y_2+z_2=0$.
On a donc : $u_1+u_2(x_2,\alpha+y_2,-2\alpha+z_2)$.

$$\text{On a : } (E) \iff \begin{cases} x_2=x \\ \alpha+y_2=y \\ -2\alpha+z_2=z \\ x_2+y_2+z_2=0 \end{cases}.$$
$$\iff \begin{cases} x_2=x \\ y_2=y-\alpha \\ z_2=z-2\alpha \\ x+y+z-3\alpha=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x_2=x \\ y_2=y-\dfrac{x+y+z}{3}=\dfrac{-x+2y-z}{3} \\ z_2=z-2\dfrac{x+y+z}{3}=\dfrac{-2x-2y+z}{3} \\ \alpha=\dfrac{x+y+z}{3} \end{cases}$$

L'équation (E) admet donc une unique solution.
On en déduit que : $\boxed{\mathbb{R}^3=H\oplus F}$

Exercice 2 : Un morphisme polynomial

1. Montrons que l'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
L'application φ est une application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$. Il suffit donc de montrer que φ est une application linéaire.
Soient $(P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.
On a :
$$\begin{aligned}\varphi(\alpha P+\beta Q) &= X((\alpha P+\beta Q)(X+1)-(\alpha P+\beta Q)(X)) \\ &= X(\alpha P(X+1)+\beta Q(X+1)-\alpha P(X)-\beta Q(X)) \\ &= \alpha X(P(X+1)-P(X))+\beta X(Q(X+1)-Q(X)) \\ &= \alpha\varphi(P)+\beta\varphi(Q)\end{aligned}$$
Ainsi, l'application φ est linéaire.
$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est donc un endomorphisme de } \mathbb{R}[X].}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a :
$$\begin{aligned}\varphi(X^n) &= X((X+1)^n - X^n) \\ &= X\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k - X^n\right) \\ &= X\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}X^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}X^{k+1} \\ &= nX^n + \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}X^{k+1}\end{aligned}$$
Donc, si $n \neq 0$, $\deg(\varphi(X^n)) = n$ et si $n=0$, $\varphi(X^n)=0$.
Le terme dominant de $\varphi(X^n)$ est donc nX^n.
Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\deg(P) = n$.
On a donc : $a_n \neq 0$.
On traite deux cas :
   (a) Si $n \neq 0$, on a : $\varphi(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\varphi(X^k)$.
   Si $k \in [\![0, n-1]\!]$, alors $\deg(\varphi(X^k)) < n = \deg(\varphi(X^n))$.
   De plus, le terme dominant de $\varphi(X^n)$ est nX^n.
   On en déduit que le terme dominant de $\varphi(P)$ est na_nX^n.
   (b) Si $n=0$, on a : $\varphi(P) = a_0\varphi(1) = 0$.
   Le terme dominant de $\varphi(P)$ est donc : $0 = na_nX^n$.

$\boxed{\text{Le terme dominant de } \varphi(P) \text{ est donc } na_nX^n.}$

3. On a : $\forall a \in \mathbb{R} \quad \varphi(a) = a\varphi(1) = 0$.
Donc : $\mathbb{R} \subset \ker(\varphi)$.
Soit $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \mathbb{R}$.
Soient $n = \deg(P)$ et a_n le coefficient dominant de P.
On a : $n > 0$ et $a_n \neq 0$. Le terme dominant de $\varphi(P)$ est $na_nX^n \neq 0$.
Donc : $P \notin \ker(\varphi)$.
D'où : $\ker(\varphi) \subset \mathbb{R}$.
On en déduit : $\boxed{\ker(\varphi) = \mathbb{R}}$

4. (a) Montrons que l'ensemble E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
   On a : $\varphi(0) = 0 = \lambda.0$.
   Donc : $0 \in E_\lambda$ et $E_\lambda \neq \emptyset$.
   Soient $(P,Q) \in E_\lambda^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.
   On a : $\varphi(\alpha P+\beta Q) = \alpha\varphi(P)+\beta\varphi(Q)$.
   Or, P et Q sont des solutions de $(\mathcal{E}_\lambda)$.
   Donc : $\varphi(P) = \lambda P$ et $\varphi(Q) = \lambda Q$.
   D'où : $\varphi(\alpha P+\beta Q) = \alpha\lambda P+\beta\lambda Q = \lambda(\alpha P+\beta Q)$.
   Donc : $\alpha P+\beta Q \in E_\lambda$.
   $\boxed{\text{On en déduit que } E_\lambda \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}[X].}$
   (b) On suppose que $E_\lambda \neq \{0\}$.
   Soit $P \in E_\lambda$ tel que $P \neq 0$.
   Soit $n = \deg(P)$ et a_n le coefficient dominant de P.
   Le terme dominant de P est a_nX^n.
   Donc, le terme dominant de $\varphi(P) = \lambda P$ est λa_nX^n.
   De plus, le terme dominant de $\varphi(P)$ est na_nX^n.
   Or : $a_n \neq 0$.
   D'où : $\lambda = n$.
   $\boxed{\text{Ainsi, } \lambda \in \mathbb{N} \text{ et les éléments non nuls de } E_\lambda \text{ sont des polynômes de degré } \lambda.}$
   (c) On suppose que $E_\lambda \neq \{0\}$.
   Soit $P \in E_\lambda$ tel que $P \neq 0$.
   Soit α le coefficient dominant de P.
   On pose : $P_0 = \dfrac{P}{\alpha}$.
   On a : $P_0 \in E_\lambda$ et P_0 est un polynôme unitaire.
   On a également : $\deg(P_0) = \lambda$.
   Montrons que $E_\lambda = \mathrm{vect}(P_0)$.
   Soit $Q \in E_\lambda$.
      i. Si $Q \neq 0$: on a : $\deg Q = \lambda$.
      Soit β le coefficient dominant de Q.

On sait que le polynôme P_0 est unitaire de degré λ.
On a donc : $Q - \beta P_0 \in E_\lambda$ et $\deg(Q - \beta P_0) < \lambda$.
Par la question précédente, on en déduit que : $Q - \beta P_0 = 0$ et donc : $Q = \beta P_0$.

ii. Si $Q = 0$, alors $Q = 0.P_0$.

On en déduit que $\underline{E_\lambda = \mathrm{vect}(P_0)}$.
Soit Q_0 un polynôme unitaire tel que $E_\lambda = \mathrm{vect}(Q_0)$.
On a : $\deg(Q_0) = \deg(P_0) = \lambda$ et les polynômes P_0 et Q_0 sont unitaires.
Donc : $\deg(P_0 - Q_0) < \lambda$.
Or : $P_0 - Q_0 \in E_\lambda$.
Par la question précédente, on en déduit : $P_0 - Q_0 = 0$ et donc $P_0 = Q_0$.

On en déduit que si $E_\lambda \neq \{0\}$, alors E_λ est engendré par un unique polynôme unitaire.

5. (a) Par l'étude précédente, il suffit de montrer que E_0, E_1, E_2 et E_3 admettent un polynôme unitaire.
On a : $(\mathcal{E}_0) \iff \varphi(P) = 0 \iff P \in \ker(\varphi)$.
Donc : $E_0 = \ker(\varphi) = \mathbb{R} = \mathrm{vect}(1)$.
On en déduit : $\boxed{P_0 = 1}$
Si P_1 existe, alors $\deg(P_1) = 1$ et il est donc de la forme $P_1 = X + a$ où $a \in R$.
On a : $\varphi(X + a) = X((X + 1 + a - (X + a))) = X$.
Donc : $\varphi(X + a) = X + a \iff a = 0$.
D'où : $\boxed{P_1 = X}$
Si P_2 existe, alors $\deg(P_2) = 2$ et il est donc de la forme $P_2 = X^2 + aX + b$ où $(a, b) \in R^2$.
On a :
$$\begin{aligned}\varphi(X^2 + aX + b) &= X((X + 1)^2 + a(X + 1) + b - (X^2 + aX + b)) \\ &= X(2X + a + 1) = 2X^2 + (a + 1)X\end{aligned}$$
Donc :
$$\varphi(X^2 + aX + b) = 2(X^2 + aX + b) \iff \begin{cases} a + 1 = 2a \\ b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$
D'où : $\boxed{P_2 = X^2 + X}$
Si P_3 existe, alors $\deg(P_3) = 3$ et il est donc de la forme $P_3 = X^3 + aX^2 + bX + c$ où $(a, b, c) \in R^3$.
On a :
$$\begin{aligned}\varphi(X^3 + aX^2 + bX + c) &= X((X + 1)^3 + a(X + 1)^2 + b(X + 1) + c \\ &\quad - (X^3 + aX^2 + bX + c)) \\ &= X(3X^2 + (3 + 2a)X + (1 + a + b))\end{aligned}$$
Donc :
$$\varphi(X^3 + aX^2 + bX + c) = 3(X^3 + aX^2 + bX + c) \iff \begin{cases} 3 + 2a = 3a \\ 1 + a + b = 3b \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$
D'où : $\boxed{P_3 = X^3 + 3X^2 + 2X}$

(b) On a : $\boxed{P_0 = 1,\ P_1 = X \text{ et } P_2 = X(X + 1)}$
Enfin, $P_3 = X(X^2 + 3X + 2)$. D'où : $\boxed{P_3 = X(X + 1)(X + 2)}$

(c) Montrons par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad E_n = \mathrm{vect}(P_n) \text{ et } P_n = \prod_{k=0}^{n-1} X + k \quad (\mathcal{H}_n)$$

Initialisation : D'après les deux questions précédentes, la propriété est vraie aux rangs 0, 1, 2 et 3.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $(\mathcal{H}_n)$.
On a : $P_{n+1} = (X + n)P_n$.
Donc :
$$\begin{aligned}\varphi(P_{n+1}) &= \varphi((X + n)P_n) \\ &= X((X + n + 1)P_n(X + 1) - (X + n)P_n(X)) \\ &= (X + n)\underbrace{X(P_n(X + 1) - P_n(X))}_{=\varphi(P_n)} + XP_{n+1}(X + 1) \\ &= n(X + n)P_n + X\prod_{k=0}^{n-1} X + k + 1 \\ &= nP_{n+1} + \underbrace{X\prod_{k=1}^{n} X + k}_{=P_{n+1}} \\ &= (n + 1)P_{n+1}\end{aligned}$$
La propriété est donc héréditaire.

Pour tout entier n, l'ensemble E_n est donc engendré par le polynôme unitaire $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} X + k$.