

Étude d'une fonction - Dérivées itérées

Problème 1. Étude d'une fonction

Partie I

Soit ℓ un réel. On note f l'application de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} définie par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ si $x > 0$ et $f(0) = \ell$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note \mathcal{I}_n l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$.

1. Quelle valeur faut-il donner à ℓ pour que f soit continue à droite en 0 ?
 On suppose désormais que ℓ est égale à cette valeur.
2. Montrez que f est de classe \mathcal{C}^1 (c'est-à-dire : dérivable, et à dérivée continue) sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et explicitez la dérivée de f à droite en 0.
3. Soit $n \geq 1$. Montrez que, dans l'intervalle \mathcal{I}_n , l'équation $x \cos x = \sin x$ possède une et une seule solution, que l'on notera x_n .
4. Déterminez un équivalent *très simple* de x_n , lorsque n tend vers l'infini.
5. Décrivez rapidement les variations de f dans l'intervalle \mathcal{I}_0 , puis dans les intervalles \mathcal{I}_{2n-1} et \mathcal{I}_{2n} pour $n \geq 1$.
6. Déterminer l'allure de la courbe représentative de f .

Partie II

Il est clair que la restriction g de f à l'intervalle $]0, +\infty[$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur cet intervalle. On se propose d'établir quelques résultats concernant la dérivée n -ième de g , notée $g^{(n)}$. En particulier, $g^{(0)}$ désigne g elle-même.

1. Explicitez $g''(x)$ pour $x > 0$.
 Au vu des expressions de $g(x)$, $g'(x)$ et $g''(x)$, on se propose d'établir que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Il existe deux polynômes P_n et Q_n tels que, pour tout $x > 0$:

$$g^{(n)}(x) = \frac{P_n(x) \sin^{(n)} x + Q_n(x) \sin^{(n+1)} x}{x^{n+1}}$$

Vous allez raisonner par récurrence sur n .

2. Il est clair que $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour $n \in \{0, 1, 2\}$; vous dresserez simplement un tableau donnant les expressions de P_n pour ces valeurs de n . Voyez-vous apparaître une relation *simple* entre P_n et Q_n ?
3. On fixe $n \in \mathbb{N}$, et on suppose l'assertion $\mathcal{A}(n)$ acquise. Établissez l'assertion $\mathcal{A}(n+1)$; vous déterminerez des expressions de P_{n+1} et Q_{n+1} en fonction de P_n et Q_n .
 Il résulte donc des questions 2 et 3 que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrez que P_n et Q_n ont tous leurs coefficients dans \mathbb{Z} ; précisez le degré, la parité, et le coefficient dominant de ces polynômes.
5. Utilisez les formules établies à la question 3 pour expliciter P_3 et Q_3 .
6. Deux polynômes U et V vérifient $U(x) \sin x + V(x) \cos x = 0$ pour tout $x > 0$. Montrez que U et V sont tous deux égaux au polynôme nul.

Indications : On évaluera l'expression précédente en des points bien choisis.

7. En partant de la relation $xg(x) = \sin x$ et en appliquant la formule de Leibnitz, ainsi que le résultat de la question précédente, mettez en évidence deux nouvelles relations liant P_n , Q_n , P_{n+1} et Q_{n+1} .
8. Justifiez alors la relation $P'_n = Q_n$, et montrez que P_n est solution d'une équation différentielle du second ordre *très simple*, que l'on notera \mathcal{E}_n .
9. Il est clair que l'application $\Psi : T \mapsto T + T''$ est un endomorphisme du \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Montrez que Ψ induit un automorphisme Ψ_n du sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ constitué des polynômes de degré n au plus; montrez ensuite que Ψ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Il résulte de ceci que P_n est l'unique solution polynomiale de l'équation différentielle \mathcal{E}_n .
10. $n \in \mathbb{N}$ est fixé, et p désigne la partie entière de $n/2$. Justifiez l'existence d'une famille $(a_k)_{0 \leq k \leq p}$ de réels vérifiant $P_n = \sum_{0 \leq k \leq p} a_k X^{n-2k}$ et déterminez une expression de a_k faisant intervenir des factorielles et/ou des puissances, mais débarassées de tout signe \prod .
11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + y = x^n$.