Détermination de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$
Exercice n°10 - feuille 0 Partie I

1 Énoncé

Exercice 10. *Détermination de* $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

1. (a) Résoudre l'équation d'inconnue $a \in \mathbb{R}$: $\sin(5a) = 0$.
   (b) Préciser les cinq solutions de cette équation dans $[0, \pi[$.
   (c) Ordonner les cosinus de ces cinq solutions.
2. (a) Écrire $\sin(5a)$ sous la forme d'un polynôme trigonométrique de la forme $\sin(a)P(\cos(a))$ où P est un polynôme à coefficients réels.
   (b) Déterminer les racines de P.
   (c) Ordonner les racines de P.
3. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

2 Résolution

1. (a) On a : $\sin(5a) = 0 \iff 5a = 0[\pi]$
$$\iff a = 0\left[\frac{\pi}{5}\right]$$

$\boxed{\text{Les solutions de l'équation sont donc les nombres } a \in \mathbb{R} \text{ tels que : } a = 0\left[\frac{\pi}{5}\right]}$

   (b) On a : $a = 0\left[\frac{\pi}{5}\right] \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad a = k\frac{\pi}{5}$.
   Soit $k \in \mathbb{Z}$.
   On a : $k\frac{\pi}{5} \in [0, \pi[\iff k \in [0, 5[\iff k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

$\boxed{\text{Les solutions de l'équation dans } [0,\pi[\text{ sont donc : } 0, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5} \text{ et } \frac{4\pi}{5}.}$

   (c) La fonction cos est strictement décroissante sur $[0, \pi[$.

On a donc :

$$\boxed{\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) < \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) < \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) < \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) < \cos(0)}$$

2. (a) On a : $\sin(5a) = \sin(3a + 2a) \quad = \sin(3a)\cos(2a) + \cos(3a)\sin(2a)$
Or :
$$\begin{aligned}\cos(3a) &= \cos(2a + a)\\ &= \cos(2a)\cos(a) - \sin(2a)\sin(a)\\ &= (2\cos^2(a) - 1)\cos(a) - 2\sin^2(a)\cos(a)\\ &= 2\cos^3(a) - \cos(a) - 2\left(1 - \cos^2(a)\right)\cos(a)\\ &= 4\cos^3(a) - 3\cos(a)\end{aligned}$$
et :
$$\begin{aligned}\sin(3a) &= \sin(2a + a)\\ &= \sin(2a)\cos(a) + \cos(2a)\sin(a)\\ &= 2\sin(a)\cos^2(a) + (2\cos^2(a) - 1)\sin(a)\\ &= \sin(a)\left(4\cos^2(a) - 1\right)\end{aligned}$$
D'où :
$$\begin{aligned}\sin(5a) &= \sin(a)\left(4\cos^2(a) - 1\right)\left(2\cos^2(a) - 1\right) \quad .\\ &\quad + 2\left(4\cos^3(a) - 3\cos(a)\right)\sin(a)\cos(a)\\ &= \sin(a)\left(16\cos^4(a) - 12\cos^2(a) + 1\right)\end{aligned}$$
On a établi :

$$\boxed{\sin(5a) = \sin(a)\left(16\cos^4(a) - 12\cos^2(a) + 1\right)}$$

$$\boxed{\text{Le polynôme } P \text{ recherché est : } P = 16X^4 - 12X^2 + 1}$$

   (b) On a :
$$\begin{aligned}P &= \left(4X^2 - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\\ &= \left(4X^2 - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(4X^2 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\\ &= 16\left(X^2 - \frac{3+\sqrt{5}}{8}\right)\left(X^2 - \frac{3-\sqrt{5}}{8}\right)\end{aligned}$$
Remarquons que $3 > \sqrt{5}$ car $3^2 > 5$ et $3 > 0$.

D'où : $P = 16\left(X - \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}\right)\left(X + \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}\right)$

$$\left(X - \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}\right)\left(X + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}\right)$$

$$= 16\left(X - \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}\right)\left(X + \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}\right)$$

$$\left(X - \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{4}\right)\left(X + \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{4}\right)$$

Les racines de P sont donc : $\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}$, $-\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}$, $\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{4}$ et $-\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{4}$.

Remarque 2.1. *i. Une méthode alternative pour déterminer les racines de P consiste à poser $Y = X^2$. Cela ramène le problème à la résolution d'une équation du second degré.*

ii. On peut remarquer que : $6 + 2\sqrt{5} = \left(1+\sqrt{5}\right)^2$. Les racines de P se ré-exprime sous la forme : $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $-\frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ et $-\frac{1-\sqrt{5}}{4}$.

(c) On a : $6 - 2\sqrt{5} < 6 + 2\sqrt{5}$.
Donc : $\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{4} < \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}$.
D'où :

$$\boxed{-\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4} < -\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{4} < \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{4} < \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}}$$

3. On a : $\sin(5a) = \sin(a)P(\cos(a))$.
Donc : $\sin(5a) = 0 \quad (E) \iff \sin(a) = 0$ ou $P(\cos(a)) = 0$
$\iff a = 0[\pi]$ ou $P(\cos(a)) = 0$
Or : $\frac{\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{5}$ et $\frac{4\pi}{5}$ ne sont pas congrus à 0 modulo π.
Puisque qu'ils sont solutions de l'équation (E), on en déduit que leur cosinus sont des racines de P. Par la question 1.(c), ce sont des racines distinctes de P. Toujours d'après la question 1.(c) et par l'encadrement de la question 2.(c), on peut en déduire que :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}}$$

Remarque 2.2. *A l'aide de la remarque précédente, on obtient une meilleure expression : $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.*