Lycée Gustave Eiffel Année 2010-2011
Mathématiques PTSI 2 Exercice hebdomadaire n°10
Rendu le 8 décembre 2010

Étude d'une courbe paramétrée
Exercice n°2 (6)- feuille n°5

1 Énoncé

Exercice 2. *Étudier la courbe de paramètre t suivante :*

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{t^2+2t+5} \\ y(t) = t + \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

2 Résolution

1. On a : $t^2+2t+5 = (t+1)^2+4 > 0$.
   La fonction x est donc définie sur $\mathbb{R}$.
   La fonction y est définie sur $\mathbb{R}^*$.

   $\boxed{\text{Le paramétrage est définie sur } \mathbb{R}^*.}$

   Remarque 2.1. *L'unique symétrie du domaine de définition de la courbe est la symétrie de centre 0. La fonction x n'est ni paire ni impaire. Il n'y a donc pas a priori de symétrie de la courbe.*

2. On a : $\forall t \in \mathbb{R}^* \quad t^2+2t+5 > 0$ et la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   La fonction x est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   On a : $x'(t) = \dfrac{2t+2}{2\sqrt{t^2+2t+5}} = \dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+5}}$.
   Le signe de $x'(t)$ est donc le signe de $t+1$.
   La fonction y est une fraction de polynôme. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   On a : $y'(t) = 1 - \dfrac{1}{t^2} = \dfrac{t^2-1}{t^2} = \dfrac{(t-1)(t+1)}{t^2}$.
   Le signe de $y'(t)$ est donc celui de $(t-1)(t+1)$.
   On en déduit le tableau de variations suivants :

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$		$+$	$+$	$+$	
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\sqrt{5}$	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty \ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Justifions les limites :
On a : $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} t^2+2t+5 = 5$.
Donc, par la continuité de la fonction racine carrée en 5, on en déduit que :
$\boxed{\lim\limits_{t\longrightarrow 0} x(t) = \sqrt{5}}$
On a : $\lim\limits_{t\longrightarrow 0^+} \dfrac{1}{t} = +\infty$ et $\lim\limits_{t\longrightarrow 0^-} \dfrac{1}{t} = -\infty$.
Donc : $\boxed{\lim\limits_{t\longrightarrow 0^+} y(t) = +\infty \text{ et } \lim\limits_{t\longrightarrow 0^-} y(t) = -\infty}$
On a : $\lim\limits_{t\longrightarrow +\infty} t^2+2t+5 = +\infty$ et $\lim\limits_{t\longrightarrow -\infty} t^2+2t+5 = +\infty$. Donc :
$\boxed{\lim\limits_{t\longrightarrow +\infty} x(t) = \lim\limits_{t\longrightarrow -\infty} x(t) = +\infty.}$
On a : $\lim\limits_{t\longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{t} = \lim\limits_{t\longrightarrow -\infty} \dfrac{1}{t} = 0$. Donc : $\boxed{\lim\limits_{t\longrightarrow +\infty} y(t) = +\infty \text{ et } \lim\limits_{t\longrightarrow -\infty} y(t) = -\infty}$

3. La courbe admet un unique point stationnaire en $t=-1$.
   On a : $$\frac{y(t)-y(-1)}{x(t)-x(-1)} = \frac{t+\frac{1}{t}+2}{\sqrt{t^2+2t+5}-2} = \frac{t^2+2t+1}{t}\,\frac{\sqrt{t^2+2t+5}+2}{t^2+2t+1} = \frac{\sqrt{t^2+2t+5}+2}{t}$$
   Donc, $\lim\limits_{t\longrightarrow -1} \dfrac{y(t)-y(-1)}{x(t)-x(-1)} = -4$.

   $\boxed{\text{La courbe admet donc au point de paramètre } -1 \text{ de coordonnées } (2,-2) \text{ une tangente de pente } -4.}$

4. $\boxed{\text{D'après les limites de } x \text{ et de } y \text{ en } 0\text{, la courbe admet en } 0 \text{ une asymptote d'équation } x = \sqrt{5}.}$

D'après les limites de x et de y en 0, la courbe admet en $+\infty$ une branche infinie.

On a : $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{t+\frac{1}{t}}{\sqrt{t^2+2t+5}} = \dfrac{t^2\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}{t|t|\sqrt{1+\frac{2}{t}+\frac{5}{t^2}}}$ $(\sharp)$.

On suppose : $t > 0$.

On a donc : $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{1+\frac{1}{t^2}}{\sqrt{1+\frac{2}{t}+\frac{5}{t^2}}}$.

Or : $\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty} 1+\dfrac{2}{t}+\dfrac{5}{t^2} = 1$ et $\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty} 1+\dfrac{1}{t^2} = 1$.

D'où : $\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 1$.

On a : $y(t)-x(t) = t+\dfrac{1}{t}-\sqrt{t^2+2t+5} = \dfrac{t^2-(t^2+2t+5)}{t+\sqrt{t^2+2t+5}}+\dfrac{1}{t}$.

$$= \frac{-2t-5}{t(1+\sqrt{1+\frac{2}{t}+\frac{5}{t^2}})}+\frac{1}{t} = \frac{-2-\frac{5}{t}}{1+\sqrt{1+\frac{2}{t}+\frac{5}{t^2}}}+\frac{1}{t}$$

Or : $\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty} 1+\sqrt{1+\dfrac{2}{t}+\dfrac{5}{t^2}} = 2$ et $\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty} -2-\dfrac{5}{t} = -2$.

D'où : $\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty} y(t)-x(t) = -1$.

$\boxed{\text{On en déduit que la courbe admet en } +\infty \text{ une asymptote d'équation } y = x-1.}$

La courbe admet en $-\infty$ une branche infinie.

On suppose maintenant : $t < 0$.

On a donc par la relation $(\sharp)$: $\dfrac{y(t)}{x(t)} = -\dfrac{1+\frac{1}{t^2}}{\sqrt{1+\frac{2}{t}+\frac{5}{t^2}}}$.

D'où : $\lim\limits_{t\longrightarrow-\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = -1$ et $\lim\limits_{t\longrightarrow-\infty} 1+\dfrac{1}{t^2} = 1$.

On a : $y(t)+x(t) = t+\dfrac{1}{t}+\sqrt{t^2+2t+5} = \dfrac{t^2-(t^2+2t+5)}{t-\sqrt{t^2+2t+5}}+\dfrac{1}{t}$.

$$= \frac{-2t-5}{t(1+\sqrt{1+\frac{2}{t}+\frac{5}{t^2}})}+\frac{1}{t} = \frac{-2-\frac{5}{t}}{1+\sqrt{1+\frac{2}{t}+\frac{5}{t^2}}}+\frac{1}{t}$$

Donc : $\lim\limits_{t\longrightarrow-\infty} y(t)+x(t) = -1$.

$\boxed{\text{On en déduit que la courbe admet en } -\infty \text{ une tangente d'équation } y = -x-1.}$

5. On en déduit la courbe suivante :