Un des principes de fonctionnement d'un GPS
Exercice n°9 - feuille n°6

1 Énoncé

Exercice 9. *Un des principes de fonctionnement d'un GPS*

On assimile la terre à une sphère de centre O et de rayon 3. Trois satellites A_1, A_2 et A_3 ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$. On se donne M un point sur la terre.

1. Le système GPS mesure que la distance MA_1 vaut 1.
   Montrer que M est sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon ainsi que l'équation de son plan.
2. Le système GPS mesure que la distance MA_2 vaut 1.
   (a) Montrer que M est situé sur une droite dont on donnera les équations cartésiennes.
   (b) Déterminer une équation paramétrique de la droite.
   (c) En déduire deux choix possibles pour les coordonnées de M.
3. Le système GPS mesure que la distance MA_3 vaut 2.
   En déduire la position de M.

2 Résolution

1. On note S la sphère de centre O et de rayon 3. On considère également la sphère $\mathcal{S}_1$ de centre A_1 et de rayon 1.
   On a : $M \in \mathcal{S}$ et : $MA_1 = 1$.
   On a donc : $M \in \mathcal{S}_1$.
   Le point M est donc sur l'intersection des sphères $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_1$.
   On a : $OA_1 = 2\sqrt{3}$. Donc : $3 - 1 < OA_1 < 3 + 1$.
   L'intersection des deux sphères est donc un cercle $\mathcal{C}$ et le point M est un point de $\mathcal{C}$.
   La sphère $\mathcal{S}$ est la sphère de centre O et de rayon 3 et la sphère $\mathcal{S}_1$ est la sphère de centre $A_1 \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ et de rayon 1.

L'intersection des deux sphères admet pour équation :

$$\left\{\begin{array}{llll} x^2 & +y^2 & +z^2 & = 9 \\ (x-2)^2 & +(y-2)^2 & +(z-2)^2 & = 1 \end{array}\right. \quad (E)$$

$$\text{Or : } (E) \left\{\begin{array}{llll} x^2 & +y^2 & +z^2 & = 9 \\ x^2 - 4x & +y^2 - 4y & +z^2 - 4z & = -11 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llll} x^2 & +y^2 & +z^2 & = 9 \\ -4x & -4y & -4z & = -20 \end{array}\right. \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$$

$$\left\{\begin{array}{llll} x^2 & +y^2 & +z^2 & = 9 \\ x & +y & +z & = 5 \end{array}\right. \quad (L_2 \leftarrow -\frac{1}{4}L_2)$$

<u>Le plan de $\mathcal{C}$ est donc plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $x + y + z = 5$.</u>
Le centre Ω du cercle $\mathcal{C}$ est le projeté orthogonal de O sur $\mathcal{P}_1$.
Un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$ est $\vec{n} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.
Ainsi, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{O\Omega} = a\vec{n} \begin{pmatrix}a\\a\\a\end{pmatrix}$.
D'où : $\Omega \begin{pmatrix}a\\a\\a\end{pmatrix}$.

Or : $\Omega \in \mathcal{P}_1$. Donc : $a + a + a = 5$. D'où : $a = \frac{5}{3}$. Ainsi : $\Omega \begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\\frac{5}{3}\\\frac{5}{3}\end{pmatrix}$.

Soit P un point du cercle $\mathcal{C}$.
Le triangle ΩOP est rectangle en Ω.
Par le théorème de Pythagore, on a : $O\Omega^2 + \Omega P^2 = OP^2$.
Or : $OP = 3$ et $O\Omega^2 = \frac{25}{3}$.
D'où : $\Omega P^2 = 9 - \frac{25}{3} = \frac{2}{3}$ et donc $\Omega P = \frac{\sqrt{6}}{3}$.
Le rayon du cercle $\mathcal{C}$ est donc : $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

$\boxed{\text{Le point } M \text{ est donc sur le cercle } \mathcal{C} \text{ de centre } \Omega \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}, \text{ de plan } \mathcal{P}_1 \text{ d'équation } x+y+z=5 \text{ et de rayon } \frac{\sqrt{6}}{3}.}$

2. (a) On considère la sphère $\mathcal{S}_2$ de centre $A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et de rayon 1.

On a : $MA_2 = 1$. Donc : $M \in \mathcal{S}_2$.
Le point M est donc un point de l'intersection de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{S}_2$. L'intersection de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_2$ admet pour équation cartésienne :

$$\left\{ \begin{array}{lll} x^2 & +y^2 & +z^2 = 9 \\ (x-1)^2 & +(y-2)^2 & +(z-3)^2 = 1 \end{array} \right. \quad (E')$$

Or : $(E') \iff \left\{ \begin{array}{llll} x^2 & +y^2 & +z^2 & = 9 \\ x^2 - 2x & +y^2 - 4y & +z^2 - 6z & = -13 \end{array} \right.$
$\iff \left\{ \begin{array}{llll} x^2 & +y^2 & +z^2 & = 9 \\ -2x & -4y & -6z & = -22 \end{array} \right. \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$
$\iff \left\{ \begin{array}{llll} x^2 & +y^2 & +z^2 & = 9 \\ x & +2y & +3z & = 11 \end{array} \right. \quad (L_2 \leftarrow -\frac{1}{4} L_2)$

Le point M est donc un point du plan $\mathcal{P}_2$ d'équation $x + 2y + 3z = 11$.
Le point M est également un point du plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $x + y + z = 5$.

Un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$ est $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$ est $\vec{n}' \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires. L'intersection $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est donc une droite.

$\boxed{\text{Par conséquent, le point } M \text{ est sur la droite } \mathcal{D} \text{ d'équation } \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=5 \\ x+2y+3z=11 \end{array} \right.}$

(b) Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{n} \wedge \vec{n'}$.

Or : $\vec{n} \wedge \vec{n'} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On cherche un point de $\mathcal{D}$. On le choisit arbitrairement tel que $z = 0$.

On résout donc : $\left\{ \begin{array}{l} x+y=5 \\ x+2y=11 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x+y=5 \\ y=6 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x=-1 \\ y=6 \end{array} \right.$.

Le point de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ est donc un point de $\mathcal{D}$.

$\boxed{\text{On en déduit une équation cartésienne de } \mathcal{D} : \left\{ \begin{array}{ll} x & = t-1 \\ y & = 6-2t \\ z & = t \end{array} \right.}$

(c) Le point M est un point de $\mathcal{D}$. Il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que : $M \begin{pmatrix} t-1 \\ 6-2t \\ t \end{pmatrix}$.

Or M est un point de $\mathcal{S}$ dont l'équation est : $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
On a donc : $(t-1)^2 + (6-2t)^2 + t^2 = 9$.
D'où : $6t^2 - 26t + 28 = 0$ et donc : $3t^2 - 13t + 14 = 0$ (E'').
Le discriminant de (E'') est : $13^2 - 12 * 14 = 1$.
Les solutions de (E'') sont donc : $\frac{13+1}{6} = \frac{7}{3}$ et $\frac{13-1}{6} = 2$.
En injectant ces valeurs dans l'équation paramétrique de $\mathcal{D}$, on trouve l'alternative suivante :

$$\boxed{M \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} \text{ ou } M \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

3. On note M_1 et M_2 les deux points trouvés à la question précédente.

$$\begin{aligned} \text{On a : } A_3M_1 &= \sqrt{\left(\frac{4}{3}-3\right)^2 + \left(\frac{4}{3}-2\right)^2 + \left(\frac{7}{3}-2\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} \\ &= \frac{\sqrt{30}}{3} \neq 2 \end{aligned}$$

On a également : $A_3M_2 = \sqrt{(1-3)^2 + (2-2)^2 + (2-2)^2} = 2$.

$\boxed{\text{On en déduit que le point } M \text{ est le point de coordonnées } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.}$