Équivalents de fonctions trigonométriques réciproques
Exercice n°9 - feuille n°7

1 Énoncé

Exercice 9. *Équivalents de fonctions trigonométriques réciproques*

1. Montrer que $\arccos(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$.
2. En déduire un équivalent de $\arccos(1-x)$ en 0^+ .
3. Donner un équivalent de $f(x) = \arccos\left(\frac{x^3+1}{x^3+2}\right)$ en $+\infty$.
4. De même, déterminer un équivalent de $\text{Argch}(1+x)$ en 0^+ .

2 Résolution

1. On a : $1 - \cos(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{x^2}{2}$.
 Or : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \arccos(x) = 0^+$.

Par composition à droite, on a donc : $1 - \cos(\arccos(x)) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\arccos^2(x)}{2}$.

Or : $\cos(\arccos(x)) = x$.

D'où : $\arccos^2(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} 2(1-x)$.

Or, la fonction $\arccos$ est une fonction positive.

On en déduit : $\boxed{\arccos(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sqrt{2(1-x)}}$

2. On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1-x = 1^-$.

Donc, par composition à droite : $\arccos(1-x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \sqrt{2(1-(1-x))}$.

D'où : $\boxed{\arccos(1-x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \sqrt{2x}}$

3. Pour $x > 0$, on a : $0 < x^3 + 1 < x^3 + 2$ et donc : $\frac{x^3+1}{x^3+2} < 1$.

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1}{x^3+2} = 1$.

Par composition à droite, on a : $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\left(1 - \frac{x^3+1}{x^3+2}\right)}$.

Or : $\sqrt{2\left(1 - \frac{x^3+1}{x^3+2}\right)} = \sqrt{\frac{2}{x^3+2}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{x^{\frac{3}{2}}}$.

D'où : $\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{x^{\frac{3}{2}}}}$

4. On a : $\text{ch}(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

et : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{Argch}(1+x) = 0^+$.

D'où, par composition à droite : $\text{ch}(\text{Argch}(1+x)) - 1 \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\text{Argch}^2(1+x)}{2}$.

Or : $\text{ch}(\text{Argch}(1+x)) - 1 = 1 + x - 1 = x$.

Donc : $\text{Argch}^2(1+x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} 2x$.

Or : $\text{Argch}(1+x) \geq 0$.

D'où : $\boxed{\text{Argch}(1+x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \sqrt{2x}}$