Lycée Gustave Eiffel Année 2010-2011
Mathématiques PTSI 2 Exercice hebdomadaire n°15
Rendu le 26 janvier 2011

Une application ensembliste
Exercice n°15 - feuille n°0 (Partie III)

1 Énoncé

Exercice 12. *Application ensembliste*

Soit E un ensemble, et A et B deux parties fixées de E. Soit F l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ qui à toute partie X de E associe $(X \cap A, X \cap B)$.

1. Déterminer les images de la partie vide et de $E \setminus A \cup B$.
2. A quelle condition sur A et B F est-elle injective ?
3. Est-ce que le couple $(\emptyset, B)$ admet un antécédent par F ?
4. A quelle condition sur A et B F est-elle surjective ?

2 Résolution

1. On a : $F(\emptyset) = (\emptyset \cap A, \emptyset \cap B) = (\emptyset, \emptyset)$
   et : $F(E \setminus (A \cup B)) = ((E \setminus (A \cup B)) \cap A, (E \setminus (A \cup B)) \cap B) = (\emptyset, \emptyset)$.
   D'où : $\boxed{F(\emptyset) = F(E \setminus (A \cup B)) = (\emptyset, \emptyset)}$
2. Puisque $F(\emptyset) = F(E \setminus (A \cup B))$, pour que f soit injectif, il est nécessaire que : $E \setminus (A \cup B) = \emptyset$; c'est-à-dire que $A \cup B = E$.
   Réciproquement, montrons que cette condition est suffisante.
   On suppose que : $A \cup B = E$. Montrons que f est inejective.
   Soit X_1 et X_2 deux parties de E telles que : $F(X_1) = F(X_2)$.
   On a donc : $X_1 \cap A = X_2 \cap A$ et $X_1 \cap B = X_2 \cap B$.
   Donc : $(X_1 \cap A) \cup (X_1 \cap B) = (X_2 \cap A) \cup (X_2 \cap B)$.
   Or : $(X_1 \cap A) \cup (X_1 \cap B) = X_1 \cap (A \cup B) = X_1 \cap E = X_1$ $(X_1 \subset B)$.
   De même : $(X_2 \cap A) \cup (X_2 \cap B) = X_2$.
   D'où : $X_1 = X_2$.
   On en déduit que f est injective.

   $\boxed{\text{Par conséquent, l'application } F \text{ est injective si, et seulement si } A \cup B = E.}$
3. Soit X une partie de E.
   On suppose que $F(X) = (\emptyset, B)$. On a : $X \cap A = \emptyset$ et $X \cap B = B$.
   Donc : $X \cap A \cap B = A \cap (X \cap B) = A \cap B$ et $X \cap A \cap B = \emptyset \cap A = \emptyset$.
   D'où : $A \cap B = \emptyset$.
   Pour que $(\emptyset, B)$ admet, il est nécessaire que $A \cap B = \emptyset$.
   Réciproquement, si $A \cap B =$, alors $F(B) = (A \cap B, B \cap B) = (\emptyset, B)$.

   $\boxed{\text{Le couple } (\emptyset, B) \text{ admet un antécédent par } F \text{ si, et seulement si, } A \cap B = \emptyset.}$
4. Nous venons de voir qu'une condition nécessaire pour que F soit surjective est : $A \cap B = \emptyset$.
   Montrons que cette condition est suffisante.
   On suppose que : $A \cap B = \emptyset$.
   Soit $X_1 \subset A$ et $X_2 \subset B$.
   Montrons que (X_1, X_2) admet un antécédent par F.
   On a : $F(X_1 \cup X_2) = (A \cap (X_1 \cup X_2), B \cap (X_1 \cup X_2)) = ((A \cap X_1) \cup (A \cap X_2), (B \cap X_1) \cup (B \cap X_2))$.
   Or : $X_1 \subset A$. Donc : $X_1 \cap A = X_1$ et $X_1 \cap B \subset A \cap B = \emptyset$.
   De même : $X_2 \subset B$. Donc : $X_2 \cap B = X_2$ et $X_2 \cap A \subset B \cap A = \emptyset$.
   D'où : $F(X_1 \cup X_2) = (X_1, X_2)$.

   $\boxed{\text{La fonction } F \text{ est donc surjective si, et seulement si, } A \cap B = \emptyset.}$

   Remarque 2.1. *L'application F est donc bijective si, et seulement si : $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$; c'est-à-dire si, et seulement si $A = \complement_E B$.*