Lycée Gustave Eiffel
Mathématiques PTSI 2
Rendu le 2 février 2011

Année 2010-2011
Exercice hebdomadaire n°16

Suites récurrentes
Exercice n°9 - feuille n°8

---

1 Énoncé

Exercice 9. *Suites récurrentes*

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes définie par : $\begin{cases} u_0 = x_0 \in \mathbb{C} \\ u_1 = x_1 \in \mathbb{C} \\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$
où a et b sont deux nombres complexes.
On pose alors : $\chi(X) = X^2 - aX - b$.
On note r_1 et r_2 les deux racines de χ (si χ admet une racine double alors $r_1 = r_2$).

1. Justifier proprement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. (a) Montrer que, si $x_0 = \alpha+\beta$ et $x_1 = \alpha r_1 + \beta r_2$, alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$.
   (b) On suppose $r_1 \neq r_2$.
   Déterminer α et β en fonction de x_0, x_1, r_1 et r_2 tels que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$.
3. On suppose $r_1 = r_2 = r \neq 0$.
   (a) Exprimer a et b en fonction de r.
   (b) Montrer que si $x_0 = \alpha$ et $x_1 = (\alpha+\beta)r$, alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (\alpha+\beta n)r^n$.
   (c) Déterminer α et β en fonction de x_0, x_1 et r tels que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (\alpha+\beta n)r^n$.
4. Application :
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
   Exprimer u_n en fonction de n.

2 Résolution

1. On considère l'application : $F : \begin{cases} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,y) & \longmapsto & ax+by \end{cases}$. L'application F est bien définie sur $\mathbb{C}^2$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc définie par $u_0 = x_0$, $u_1 = x_1$ et $u_{n+2} = F(u_n, u_{n+1})$.
   Or : $x_0 \in \mathbb{C}$ et $x_1 \in \mathbb{C}$.
   $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc bien définie.}}$

2. (a) On suppose : $x_0 = \alpha+\beta$ et $x_1 = \alpha r_1 + \beta r_2$.
   On montre : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$.
   Pour cela, on montre par récurrence :
   $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ et $u_{n+1} = \alpha r_1^{n+1} + \beta r_2^{n+1}$.
   Initialisation :
   On a : $u_0 = x_0 = \alpha+\beta = \alpha r_1^0 + \beta r_2^0$.
   Et : $u_1 = x_1 = \alpha r_1 + \beta r_2 = \alpha r_1^1 + \beta r_2^1$.
   La propriété est vraie au rang 0 et au rang 1.
   Hérédité :
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On suppose $u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ et $u_{n+1} = \alpha r_1^{n+1} + \beta r_2^{n+1}$.
   Montrons : $u_{n+2} = \alpha r_1^{n+2} + \beta r_2^{n+2}$.
   On a : $\begin{aligned} u_{n+2} &= au_{n+1} + bu_n \\ &= a(\alpha r_1^{n+1} + \beta r_2^{n+1}) + b(\alpha r_1^n + \beta r_2^n) \\ &= \alpha r_1^n(ar_1 + b) + \beta r_2^n(ar_2 + b) \end{aligned}$
   Or, r_1 et r_2 sont des racines de χ.
   Donc : $r_1^2 - ar_1 - b = 0$ et : $r_2^2 - ar_2 - b = 0$.
   On en déduit : $ar_1 + b = r_1^2$ et : $ar_2 + b = r_2^2$.
   D'où : $u_{n+2} = \alpha r_1^n r_1^2 + \beta r_2^n r_2^2 = \alpha r_1^{n+2} + \beta r_2^{n+2}$.
   Par récurrence, on en déduit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n}$

   (b) D'après la question précédente, il suffit de déterminer α et β tels que :
   $(E)\begin{cases} \alpha+\beta = x_0 \ (L_1) \\ \alpha r_1 + \beta r_2 = x_1 \ (L_2) \end{cases}$
   Or : $(E) \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = x_0 \\ \beta(r_2 - r_1) = x_1 - r_1 x_0 \quad (L_2 - r_1 L_1) \end{cases}$
   et : $r_2 - r_1 \neq 0$.
   Donc : $(E) \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = x_0 - \dfrac{x_1 - r_1 x_0}{r_2 - r_1} = \dfrac{r_2 x_0 - x_1}{r_2 - r_1} = \dfrac{x_1 - r_2 x_0}{r_1 - r_2} \\ \beta = \dfrac{x_1 - r_1 x_0}{r_2 - r_1} \end{cases}$.

   $$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{x_1 - r_2 x_0}{r_1 - r_2} r_1^n + \frac{x_1 - r_1 x_0}{r_2 - r_1} r_2^n.}$$

3. (a) Les nombres r_1 et r_2 sont les racines du polynômes $\chi(X) = X^2 - aX - b$.
   Par conséquent : $a = r_1 + r_2$ et $-b = r_1 r_2$.
   Or : $r_1 = r_2 = r$.
   Donc : $\boxed{a = 2r \text{ et : } b = -r^2}$

   (b) On suppose : $x_0 = \alpha$ et $x_1 = (\alpha+\beta)r$.
   On montre : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (\alpha + n\beta)r$.
   Initialisation :
   On a : $u_0 = x_0 = \alpha = (\alpha + 0.\beta)r^0$.
   Et : $u_1 = x_1 = (\alpha+\beta)r = (\alpha + 1.\beta)r^1$.

La propriété est vraie au rang 0 et au rang 1.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.
On suppose $u_n = (\alpha + n\beta)r^n$ et $u_{n+1} = (\alpha + (n+1)\beta)r^{n+1}$.
Montrons : $u_{n+2} = (\alpha + (n+2)\beta)r^{n+2}$.
On a : $\begin{aligned} u_{n+2} &= au_{n+1} + bu_n \\ &= a(\alpha + (n+1)\beta)r^{n+1}) + b(\alpha + n\beta)r^n \\ &= \alpha r^n(ar+b) + \beta r^n(a(n+1)r + bn) \end{aligned}$
Or : $a = 2r$ et $b = -r^2$.
Donc : $(ar+b) = 2r^2 - r^2 = r^2$
et : $(a(n+1)r + bn) = 2r^2(n+1) - nr^2 = (n+2)r^2$.
D'où : $u_{n+2} = \alpha r^n r^2 + \beta r^n (n+2) r^2 = (\alpha + (n+2)\beta)r^{n+2}$.
Par récurrence, on en déduit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (\alpha + n\beta)r^n}$

(c) D'après la question précédente, il suffit de déterminer α et β tel que :
$(E)\left\{\begin{array}{l} \alpha = x_0 \\ (\alpha+\beta)r = x_1 \end{array}\right.$
Or : $r \neq 0$.
Donc : $(E) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = x_0 \\ \beta = \dfrac{x_1 - rx_0}{r} \end{array}\right.$

$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \left(x_0 + n\dfrac{x_1 - rx_0}{r}\right) r^n.}$

4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie est la suite précédente dans le cas : $a = 1$, $b = 1$, $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$. On étudie les racines de $\chi(X) = X^2 - X - 1$.
Le discriminant de χ est 5.
Les racines de χ sont $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
En particulier, les racines de χ sont distinctes. On peut appliquer les résultats trouvés à la question 2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on obtient ainsi : $u_n = \dfrac{x_1 - r_2x_0}{r_1 - r_2} r_1^n + \dfrac{x_1 - r_1x_0}{r_2 - r_1} r_2^n$.
Or : $r_1 - r_2 = \sqrt{5}$, $x_1 - r_2x_0 = 1$ et : $x_1 - r_1x_0 = 1$.
Donc : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.
On en déduit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \dfrac{\sqrt{5}}{5}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$