Lycée Gustave Eiffel | Année 2010-2011
Mathématiques PTSI 2 | Exercice hebdomadaire n°17
Rendu le 9 février 2011

Suites récurrentes
Exercice n°1 - feuille n°9

---

1 Énoncé

Exercice 1. *Déterminer les développements limités d'ordre n au point 0, notés $DL_n(0)$ des fonctions f suivantes :*

14. $DL_4(0)$ de $f(x) = \ln(1+\cos(x))$
25. $DL_4(0)$ de $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$
26. $DL_4(0)$ de $f(x) = \exp\left(\dfrac{x}{\cos(x)}\right)$

2 Résolution

14. On a : $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \underset{x\to0}{o}(x^4)$.

Donc : $f(x) = \ln(2 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \underset{x\to0}{o}(x^4)) = \ln(2) + \ln(1 - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^4}{48} + \underset{x\to0}{o}(x^4))$.

On pose : $u = -\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^4}{48} + \underset{x\to0}{o}(x^4)$.

On a : $u^2 = \dfrac{x^4}{16} + \underset{x\to0}{o}(x^4)$ et : $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + \underset{u\to0}{o}(u^2)$.

D'où : $$f(x) = \begin{array}{llll} \ln(2) - \dfrac{x^2}{4} & +\dfrac{x^4}{48} & + \underset{x\to0}{o}(x^4) & . \\ & -\dfrac{x^4}{32} & & \end{array}$$

On en déduit que : $\boxed{f(x) = \ln(2) - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^4}{96} + \underset{x\to0}{o}(x^4)}$

25. On a : $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^5}{120} + \underset{x\to0}{o}(x^5)$.

D'où : $$f(x) = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \underset{x\to0}{o}(x^5)} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \underset{x\to0}{o}(x^4)}$$

On pose : $u = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^3}{24} + \dfrac{x^4}{120} + \underset{x\to0}{o}(x^4)$.

On a : $u^2 = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{5x^4}{72} + \underset{x\to0}{o}(x^4)$, $u^3 = \dfrac{x^3}{8} + \dfrac{x^4}{8} + \underset{x\to0}{o}(x^4)$

et : $u^4 = \dfrac{x^4}{16} + \underset{x\to0}{o}(x^4)$.

De plus : $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + \underset{u\to0}{o}(u^4)$.

D'où : $$f(x) = \begin{array}{lllll} 1 - \dfrac{x}{2} & -\dfrac{x^2}{6} & -\dfrac{x^3}{24} & -\dfrac{x^4}{120} & + \underset{x\to0}{o}(x^4) \\ & +\dfrac{x^2}{4} & +\dfrac{x^3}{6} & +\dfrac{5x^4}{72} & \\ & & -\dfrac{x^3}{8} & -\dfrac{x^4}{8} & \\ & & & +\dfrac{x^4}{16} & \end{array}$$

On en déduit que : $\boxed{f(x) = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{12} - \dfrac{x^4}{720} + \underset{x\to0}{o}(x^4)}$

26. On a : $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{o}(x^3)$.

Donc : $\dfrac{1}{cos(x)} = \dfrac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{o}(x^3)}$.

On pose : $u = \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{o}(x^3)$.

On a : $u^2 = \underset{x\to0}{o}(x^3)$.

De plus, $\dfrac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \underset{u\to0}{o}(u^2)$.

D'où : $\dfrac{1}{cos(x)} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{o}(x^3)$.

Ainsi : $\dfrac{x}{\cos(x)} = x + \dfrac{x^3}{2} + \underset{x\to0}{o}(x^4)$.

On pose : $v = x + \dfrac{x^3}{2} + \underset{x\to0}{o}(x^4)$.

On a : $v^2 = x^2 + x^4 + \underset{x\to0}{o}(x^4)$, $v^3 = x^3 + \underset{x\to0}{o}(x^4)$ et : $v^4 = x^4 + \underset{x\to0}{o}(x^4)$

Or : $\exp(v) = 1 + v + \dfrac{v^2}{2} + \dfrac{v^3}{6} + \dfrac{v^4}{24} + \underset{v\to0}{o}(v^4)$.

D'où : $$f(x) = \begin{array}{lllll} 1 + x & & +\dfrac{x^3}{2} & & + \underset{x\to0}{o}(x^4) \ . \\ & +\dfrac{x^2}{2} & & +\dfrac{x^4}{2} & \\ & & +\dfrac{x^3}{6} & +\dfrac{x^4}{24} & \end{array}$$

On en déduit que : $\boxed{f(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{13x^4}{24} + \underset{x\to0}{o}(x^4)}$