

Étude locale de fonctions et de courbes

1 Énoncé

Exercice 4. Après avoir éventuellement prolonger la fonction f en 0 ou en 0^+ ou 0^- , déterminer l'équation d'une tangente de f en 0 ainsi que la position relative du graphe de f au voisinage de 0.

$$8. f(x) = \frac{\ln(1+ax)}{1+x} \text{ où } a \in \mathbb{R}$$

Exercice 5. Déterminer, si elle existe, une équation de l'asymptote de $f(x)$ en $+\infty$ ainsi que la position relative du graphe de f au voisinage de $+\infty$.

$$5. f(x) = \frac{x^2+1}{x+1} \ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)$$

Exercice 7. Étudier la nature des points stationnaires des courbes suivantes :

$$2. \begin{cases} x(t) = 3t - t^3 \\ y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases}$$

2 Résolution

2.1 Exercice 4 - n°8

$$8. \text{ On a : } f(x) = \frac{\ln(1+ax)}{1+x}.$$

$$\text{Or : } \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o_{u \rightarrow 0}(u^3).$$

$$\text{En posant : } u = ax, \text{ on obtient : } \ln(1+ax) = ax - \frac{a^2x^2}{2} + \frac{a^3x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3).$$

$$\text{De plus : } \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2).$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } f(x) &= \left(ax - \frac{a^2x^2}{2} + \frac{a^3x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \right) \left(1 - x + x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \right) \\ &= ax - \frac{a^2x^2}{2} + \frac{a^3x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \\ &\quad - ax^2 + \frac{a^2x^3}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \\ &= ax - \frac{a^2+2a}{2}x^2 + \frac{2a^3+3a^2+6a}{6}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \end{aligned}$$

De plus, on a : $a^2 + 2a = a(a+2)$.

On traite quatre cas :

$$(a) \text{ Si } a \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[, \text{ alors : } -\frac{a^2+2a}{2}x^2 \leq 0.$$

$$(b) \text{ Si } a \in]-2, 0[, \text{ alors : } -\frac{a^2+2a}{2}x^2 \geq 0.$$

$$(c) \text{ Si } a = 0, \text{ alors : } f(x) = \frac{\ln(1)}{1+x} = 0.$$

$$(d) \text{ Si } a = -2, \text{ alors : } f(x) = -2x - \frac{8}{3}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3).$$

On en déduit que le graphe de f admet en 0 une tangente d'équation $y = ax$. De plus, pour l'étude de la position relative du graphe de f , il y a les quatre cas suivants :

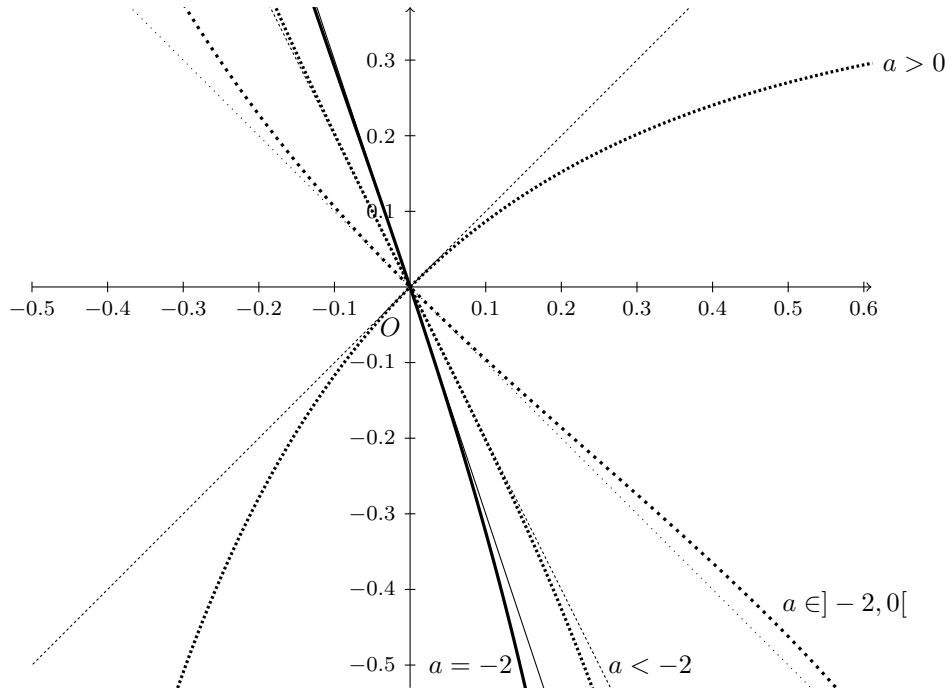
(a) Si $a \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[,$ alors le graphe de f est en-dessous de sa tangente au voisinage de 0.

(b) Si $a \in]-2, 0[,$ alors le graphe de f est au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.

(c) Si $a = 0,$ alors le graphe de f est confondu avec sa tangente.

(d) Si $a = -2,$ alors le graphe de f est au-dessus de sa tangente au voisinage de 0^+ et en-dessous au voisinage de 0^- .

On a la figure suivante :



2.2 Exercice 5 - n°5

5. On a : $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1} \ln \left(\frac{2x + 1}{x + 1} \right)$.

On pose : $u = \frac{1}{x}$.

Ainsi : $f(x) = \frac{\frac{1}{u^2} + 1}{\frac{1}{u} + 1} \ln \left(\frac{\frac{2}{u} + 1}{\frac{1}{u} + 1} \right) = \frac{1}{u} \frac{1 + u^2}{1 + u} \ln \left(\frac{2 + u}{1 + u} \right)$

On a : $\frac{1 + u^2}{1 + u} = (1 + u^2)(1 - u + u^2 + \underset{u \rightarrow 0}{o}(u^2))$
 $= 1 - u + u^2 + \underset{u \rightarrow 0}{o}(u^2)$
 $+ u^2$
 $= 1 - u + 2u^2 + \underset{u \rightarrow 0}{o}(u^2)$

De plus : $\frac{2 + u}{1 + u} = (2 + u)(1 - u + u^2 + \underset{u \rightarrow 0}{o}(u^2))$
 $= 2 - 2u + 2u^2 + \underset{u \rightarrow 0}{o}(u^2)$
 $= 2 - u + u^2 + \underset{u \rightarrow 0}{o}(u^2)$

Donc : $\ln \left(\frac{2 + u}{1 + u} \right) = \ln(2 - u + u^2 + \underset{u \rightarrow 0}{o}(u^2))$
 $= \ln(2) + \ln \left(1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{2} + \underset{u \rightarrow 0}{o}(u^2) \right)$

Or : $\ln(1 + v) = v - \frac{v^2}{2} + \underset{v \rightarrow 0}{o}(v^2)$.

On pose : $v = -\frac{u}{2} + \frac{u^2}{2} + \underset{u \rightarrow 0}{o}(u^2)$.

On a : $v^2 = \frac{u^2}{4} + \underset{u \rightarrow 0}{o}(u^2)$.

D'où : $\ln \left(\frac{2 + u}{1 + u} \right) = \ln(2) - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{2} + \underset{u \rightarrow 0}{o}(u^2)$
 $= \ln(2) - \frac{u}{2} + \frac{3u^2}{8} + \underset{u \rightarrow 0}{o}(u^2)$

On en déduit que :

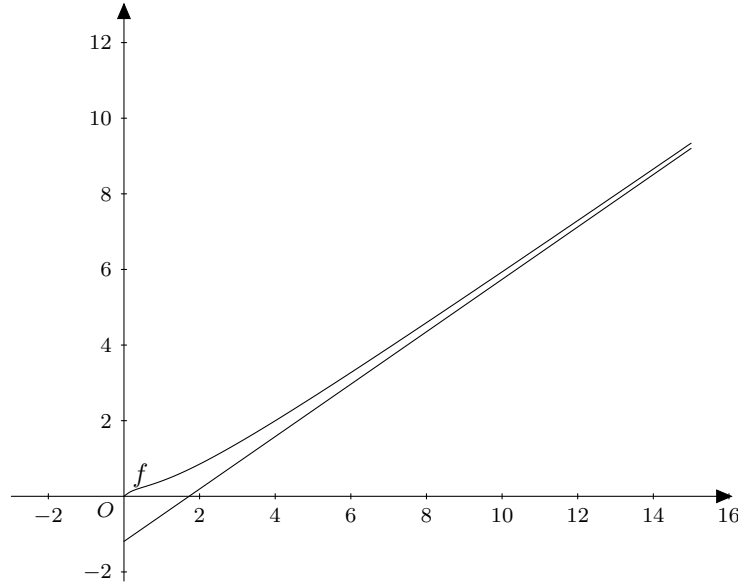
$f(x) = \frac{1}{u} \left(1 - u + 2u^2 + \underset{u \rightarrow 0}{o}(u^2) \right) \left(\ln(2) - \frac{u}{2} + \frac{3u^2}{8} + \underset{u \rightarrow 0}{o}(u^2) \right)$
 $= \frac{1}{u} \left(\ln(2) - \ln(2)u + 2\ln(2)u^2 + \underset{u \rightarrow 0}{o}(u^2) \right)$
 $- \frac{u}{2} + \frac{u^2}{2} + \frac{3u^2}{8}$

$= \frac{1}{u} \left(\ln(2) - \frac{2\ln(2) + 1}{2}u + \frac{16\ln(2) + 7}{8}u^2 + \underset{u \rightarrow 0}{o}(u^2) \right)$
 $= \frac{\ln(2)}{u} - \frac{2\ln(2) + 1}{2} + \frac{16\ln(2) + 7}{8}u + \underset{u \rightarrow 0}{o}(u)$
 $= \ln(2)x - \frac{2\ln(2) + 1}{2} + \frac{16\ln(2) + 7}{8x} + \underset{x \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$

Or : $\frac{16\ln(2) + 7}{8x} > 0$ au voisinage de $+\infty$.

On en déduit que le graphe de f admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = \ln(2)x - \frac{2\ln(2)+1}{2}$ et le graphe de f est au dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

On a donc la courbe suivante :



2.3 Exercice n°7 - n°2

2. La fonction x est un polynôme. Elle est donc définie sur $\mathbb{R}$.
De plus, la fonction y est définie en t si, et seulement si, $t^2 \neq 0$. Elle est donc définie sur $\mathbb{R}^*$.

Ainsi, le paramétrage de la courbe est défini sur $\mathbb{R}^*$.

On a : $x(-t) = -3t + 3t^3 = -x(t)$ et $y(-t) = t^2 + \frac{1}{t^2} = y(t)$.

Ainsi, on peut réduire l'étude à $\mathbb{R}^{+*}$ et on déduit le reste de la courbe par la symétrie d'axe (Oy) .

Les fonctions x et y sont des fractions de polynômes. Elles sont donc dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

De plus, on a : $x'(t) = 3 - 3t^2 = 3(1-t)(1+t)$

et : $y'(t) = 2t - \frac{2}{t^3} = 2\frac{t^4 - 1}{t^3} = \frac{2(t-1)(t+1)(t^2+1)}{t^3}$.

Ainsi, $\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases} \iff t = 1 \text{ ou } t = -1$.

La courbe admet donc deux points stationnaires en $t = 1$ et en $t = -1$.

Par la réduction du domaine d'étude précédente, il suffit d'étudier le point stationnaire en 1.

On pose : $u = t - 1$.

On a : $t = u + 1$.

D'où : $x(t) = 3(u+1) - (u+1)^3$

$$= 2 - 3u^2 - u^3$$

$$= 2 - 3(t-1)^2 - (t-1)^3$$

et : $y(t) = (u+1)^2 + \frac{1}{(1+u)^2} = 1 + 2u + u^2 + \frac{1}{(1+u)^2}$

Or : $\frac{1}{(1+u)^2} = (1-u+u^2-u^3 + o_{u \rightarrow 0}(u^3))^2$

$$= 1 - 2u + 3u^2 - 4u^3 + o_{u \rightarrow 0}(u^3)$$

D'où : $y(t) = 2 + 4u^2 - 4u^3 + o_{u \rightarrow 0}(u^3)$

$$= 2 + 4(t-1)^2 - 4(t-1)^3 + o_{t \rightarrow 1}((t-1)^3)$$

On en déduit : $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + (t-1)^2 \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{=\vec{V}_2} + (t-1)^3 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}}_{=\vec{V}_3} + o_{t \rightarrow 1}((t-1)^3)$.

Les vecteurs $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ ne sont pas colinéaires.

La courbe admet en $t = 1$ une tangente de vecteur directeur $\vec{V}_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et un rebroussement de première espèce.

Par la symétrie d'axe (Oy) et l'inversion de sens de parcours, la courbe admet en $t = -1$ une tangente de vecteur directeur $\vec{V}_2' \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et un rebroussement de première espèce. Le deuxième vecteur caractéristique est alors $\vec{V}_3' \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On a la figure suivante :

