Lycée Gustave Eiffel Année 2010-2011
Mathématiques PTSI 2 Exercice hebdomadaire n°2
Rendu le 22 septembre 2010

Suite géométrique
Exercice n°21 - feuille 0 Partie II

1 Énoncé

Exercice 21. *Suite géométrique.*

Soit $q \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = qu_n$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0.q^n$.
2. Soit $(n,m) \in \mathbb{N}^2$. Exprimer u_n en fonction de u_m, q, n et m.
3. On suppose $q \neq 1$. Montrer, par récurrence, que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
4. Que devient la somme si $q = 1$?

2 Résolution

1. Montrons, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0.q^n \quad (\mathcal{P}_n)$
   Initialisation : On a : $u_0.q^0 = u_0.1 = u_0$.
   La propriété $(\mathcal{P}_0)$ est donc vraie.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $(\mathcal{P}_n)$.
   Montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$.
   On a : $$\begin{aligned} u_{n+1} &= q.u_n \\ &= q.q^n.u_0 \quad (\sharp) \\ &= u_0.q^{n+1} \end{aligned}$$
   On en déduit : $(\mathcal{P}_{n+1})$.
   Ainsi, nous avons montré : $\forall n \in \mathbb{N} \quad (\mathcal{P}_n) \implies (\mathcal{P}_{n+1})$.
   Par le principe de récurrence, on en déduit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0.q^n}$
2. On traite deux cas :
   (a) Si $q \neq 0$: on a : $u_n = u_0.q^n = u_0.q^m.q^{n-m}$.
   Or : $u_m = u_0.q^m$
   Donc : $u_n = u_m.q^{n-m}$.
   (b) Si $q = 0$: on traite deux sous-cas :
   i. Si $n = 0$: on a : $u_n = u_0$.
   ii. Si $n > 0$: on a : $u_n = u_0.0^n = 0$.

   On en déduit : $$\boxed{u_n = \begin{cases} u_m.q^{n-m} & \text{si } q \neq 0 \\ u_0 & \text{si } q = 0 \text{ et } n = 0 \\ 0 & \text{si } q = 0 \text{ et } n > 0 \end{cases}}$$

   Remarque 2.1. *Remarquons que l'on a toujours la relation $u_n = u_m.q^{n-m}$ si $n \geq m$ même si $q = 0$.*

3. Montrons, par récurrence, que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad (\mathcal{Q}_n)$.
   Initialisation : On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} u_k = u_0$
   et : $u_0\dfrac{1-q^{0+1}}{1-q} = u_0\dfrac{1-q}{1-q} = u_0$.
   On a donc bien : $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} u_k = u_0\frac{1-q^{0+1}}{1-q} \quad (\mathcal{Q}_0)$
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $(\mathcal{Q}_n)$.
   Montrons $(\mathcal{Q}_{n+1})$.
   On a : $$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} u_k &= \sum_{k=0}^{n} u_k + u_{n+1} \\ &= u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} + u_0q^{n+1} \quad (\flat) \\ &= u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1}\right) \\ &= u_0\frac{1-q^{n+1}+(1-q)q^{n+1}}{1-q} \\ &= u_0\frac{1-q^{n+2}}{1-q} \end{aligned}$$
   On en déduit $(\mathcal{Q}_{n+1})$. Ainsi, nous avons montré : $\forall n \in \mathbb{N} \quad (\mathcal{Q}_n) \implies (\mathcal{Q}_{n+1})$.
   Par le principe de récurrence, on en déduit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$
4. On suppose que $q = 1$.
   Par la question 1, on a alors : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = q^n.u_0 = u_0$.
   Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_0$.

D'où : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0}$

A nouveau, ce résultat peut se démontrer par récurrence :

Montrons, par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_0 = (n+1)u_0 \quad (\mathcal{H}_n)$.

Initialisation : On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} u_0 = u_0 = (0+1)u_0$.

La propriété $(\mathcal{H}_0)$ est donc vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $(\mathcal{H}_n)$.

Montrons $(\mathcal{H}_{n+1})$.

On a :
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} u_0 &= \sum_{k=0}^{n} u_0 + u_0 \\ &= (n+1)u_0 + u_0 \quad (\natural) \\ &= \big((n+1)+1\big)u_0\end{aligned}$$

On en déduit $(\mathcal{H}_{n+1})$. Ainsi, nous avons montré : $\forall n \in \mathbb{N} \quad (\mathcal{H}_n) \implies (\mathcal{H}_{n+1})$.

Par le principe de récurrence, on en déduit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_0 = (n+1)u_0}$

Remarque 2.2. *Lorsque l'on rédige la phase d'hérédité d'une récurrence, il faut s'assurer que l'on utilise bien l'hypothèse de récurrence. Remarquons que cela est fait dans chacune des récurrences précédentes en* $(\sharp)$, $(\flat)$ *et* $(\natural)$. *D'autre part, lors de cette phase, on ne peut utiliser la propriété qu'au rang* n *et au rang* 0, *qui a été établi lors de la phase d'initialisation. Rien n'est connu a priori sur la propriété aux autres rangs (en particulier au rang* $n+1$ *!).*