Lycée Gustave Eiffel Année 2010-2011
Mathématiques PTSI 2 Exercice hebdomadaire n°20
Rendu le 16 mars 2011

Bornes supérieures et opérations

1 Énoncé

Exercice 18. *Borne sup, borne inf et opérations.*

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On note : $A+B=\{a+b/a\in A \text{ et } b\in B\}$.

1. Montrer que si $A\subset B$ et B est majorée, alors A est majorée et $\sup(A)\leq\sup(B)$.
2. On suppose A et B majorée.
   (a) Montrer que l'ensemble $A+B$ est majorée.
   (b) Montrer que $\sup(A)+\sup(B)\geq\sup(A+B)$.
   (c) Soit M un majorant de $A+B$. Montrer que, pour tout élément de b, $M-b$ est un majorant de A.
   (d) En déduire que $M\geq\sup(A)+\sup(B)$.
   (e) Conclure.

2 Résolution

1. On suppose que $A\subset B$ et que l'ensemble B est majorée.
   Soit $M\in\mathbb{R}$ un majorant de B.
   Montrons que M est un majorant de A.
   Soit $x\in A$.
   On a : $A\subset B$.
   Donc : $x\in B$.
   Or l'ensemble B est majoré par M.
   D'où : $x\leq M$.
   $\boxed{\text{L'ensemble } A \text{ est donc majoré.}}$
   Mieux, nous avons montré que tous les majorants de B sont des majorants de A. En particulier, la borne supérieure de B est un majorant de B. Par conséquent, $\sup(B)$ est un majorant de A. Or, par définition, la borne supérieure de A est le plus petit des majorants de A.
   D'où : $\boxed{\sup(A)\leq\sup(B)}$
2. (a) Soit $M_A\in\mathbb{R}$ et $M_B\in\mathbb{R}$ des majorants de respectivement A et B.
   Montrons que M_A+M_B est un majorant de $A+B$.
   Soit $x\in A+B$.
   Il existe $(a,b)\in A\times B$ tel que : $x=a+b$.
   On a : $a\leq M_A$ et $b\leq M_B$.
   D'où : $x=a+b\leq M_A+M_B$.
   $\boxed{\text{L'ensemble } A+B \text{ est donc majoré.}}$

   (b) Mieux, nous avons montré que pour tous majorants M_A de A et M_B de B, M_A+M_B est un majorant de $A+B$.
   Or, $\sup(A)$ et $\sup(B)$ sont des majorants respectifs de A et B.
   Ainsi, $\sup(A)+\sup(B)$ est un majorant de $A+B$.
   Or, $\sup(A+B)$ est le plus petit des majorants de $A+B$.
   D'où : $\boxed{\sup(A)+\sup(B)\geq\sup(A+B)}$

   (c) Soit $b\in B$.
   Montrons que $M-b$ est un majorant de A.
   Soit $a\in A$.
   On a : $a+b\in A+B$.
   Or, M est un majorant de $A+B$.
   D'où : $a+b\leq M$.
   Donc : $a\leq M-b$.
   $\boxed{\text{Le nombre } M-b \text{ est donc un majorant de } A.}$

   (d) Soit $b\in B$.
   Le nombre $M-b$ est un majorant de A et $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A.
   Donc : $\sup(A)\leq M-b$.
   D'où : $b\leq M-\sup(A)$.
   Le nombre $M-\sup(A)$ est donc un majorant de B.
   Or, $\sup(B)$ est le plus petit des majorants de B.
   On obtient donc : $\sup(B)\leq M-\sup(A)$.
   D'où : $\boxed{M\geq\sup(A)+\sup(B)}$

   (e) Puisque $\sup(A+B)$ est un majorant de $A+B$, on obtient ainsi : $\sup(A+B)\geq\sup(A)+\sup(B)$.
   Or, d'après la question 2b, on a : $\sup(A)+\sup(B)\geq\sup(A+B)$.
   On en conclut : $\boxed{\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)}$