Lycée Gustave Eiffel Année 2010-2011
Mathématiques PTSI 2 Exercice hebdomadaire n°21
Rendu le 23 mars 2011

Étude d'une suite définie par récurrence

1 Énoncé

Exercice 36. *Étude d'une suite définie par récurrence*

1. On étudie la fonction f telle que $f(x)=0$ si $x=0$ et $f(x)=\dfrac{x}{\ln(x)}$ sinon.
   (a) Obtenir l'ensemble de définition D de f.
   (b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1[$.
   (c) Dresser le tableau de variations de f. On y fera apparaître les différentes limites et la valeur de $f(\mathrm{e})$.
2. On étudie la suite v telle que $v_0=3$ et $\forall n\in\mathbb{N},\quad v_{n+1}=\dfrac{v_n}{\ln(v_n)}$.
   (a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\quad v_n\geqslant e$.
   (b) Justifier que la suite v converge et déterminer sa limite.
   (c) Montrer que $\forall x\geqslant \mathrm{e},\quad 0\leqslant f'(x)\leqslant \dfrac{1}{4}$.
   (d) Énoncer l'inégalité des accroissements finis.
   (e) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\quad |v_n-\mathrm{e}|\leqslant \dfrac{1}{4^n}$.
   (f) Sachant que $4^5>1000$, déterminer un entier n_1 à partir duquel v_n est une valeur approchée de e à 10^{-12} près.

2 Résolution

1. (a) Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction f est définie en x si et seulement si $x=0$ ou $\dfrac{x}{\ln(x)}$ est bien définie. Cette dernière quantité est définie si, et seulement si, $x>0$ et $\ln(x)\neq 0$. C'est-à-dire si $x>0$ et $x\neq 1$.

   On en déduit que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$, *i.e.* sur $D=[0,1[\cup]1,+\infty[$.

   (b) On calcule le taux d'accroissement de f en 0.

   On a : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{\frac{x}{\ln(x)}}{x}=\dfrac{1}{\ln(x)}$.

Or : $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\ln(x)=-\infty$.
D'où : $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$.
On en déduit que f est dérivable en 0. De plus : $f'(0)=0$.
La fonction f est une fraction de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$.
Donc, f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$.
De plus, $f'(x)=\dfrac{\ln(x)-x\frac{1}{x}}{\ln^2(x)}=\dfrac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}$.
Or : $1=\underset{x\to 0}{o}(\ln(x))$.
Donc : $f'(x)\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{\ln(x)}{\ln^2(x)}=\dfrac{1}{\ln(x)}$.
Comme précédemment, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{1}{\ln(x)}=0$.
Donc : $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}f'(x)=0=f'(0)$.
On en déduit que f' est continue en 0. La fonction f est donc $\mathcal{C}^1$ en 0.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,1[.}$$

(c) On a : $f'(x)=\dfrac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}$.
Donc, $f'(x)$ est du signe de $\ln(x)-1$. Or, ln est une fonction strictement croissante et $\ln(\mathrm{e})-1=0$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

On a : $\ln(x)\underset{x\to 1}{\sim}x-1$ et $x\underset{x\to 1}{\sim}1$. Donc : $f(x)\underset{x\to 1}{\sim}\dfrac{1}{x-1}$.
Or : $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$.
D'où : $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-}f(x)=-\infty$.
De plus, par le théorème des croissances comparées, on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}f(x)=+\infty$.

2. (a) D'après le tableau de variations de f, l'intervalle $[\mathrm{e}, +\infty[$ est f-stable. De plus, $3 \in [\mathrm{e}, +\infty[$. Et, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ v_{n+1} = f(v_n)$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc à valeurs dans $[\mathrm{e}, +\infty[$.
On en déduit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \geq \mathrm{e}}$

(b) Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{v_n}{\ln(v_n)} - v_n = v_n \dfrac{1-\ln(v_n)}{\ln(v_n)}$.
Or : $v_n \geq \mathrm{e}$.
Donc : $v_n \geq 0$, $\ln(v_n) \geq 0$ et $1 - \ln(v_n) \leq 0$.
On en déduit : $v_{n+1} - v_n \leq 0$.
La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.
Or, la suite est minorée par e. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
La fonction f est une fraction de fonctions continues sur $[\mathrm{e}, +\infty[$. Elle est donc continue. Par conséquent, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de f.
Soit $x \in [\mathrm{e}, +\infty[$.

$$f(x) = x \iff \frac{x}{\ln(x)} = x \iff \frac{1}{\ln(x)} = 1 \iff \ln(x) = 1 \iff x = \mathrm{e}$$

Le seul point fixe de f est donc e.

$$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers e.}}$$

(c) On a : $f'(x) = \dfrac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)}$.
On a déjà vu précédemment que : $f'(x) \geq 0$ sur $[\mathrm{e}, +\infty[$.
On introduit g la fonction définie par : $g(u) = \dfrac{u-1}{u^2} = \dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{u^2}$.
On a alors $f'(x) = g(\ln(x))$ et $\ln(x) \geq 1$ sur $[\mathrm{e}, +\infty[$.
On étudie donc g sur $[1, +\infty[$.
La fonction g est dérivable et : $g'(u) = -\dfrac{1}{u^2} + \dfrac{2}{u^3} = \dfrac{2-u}{u^3}$.
Ainsi, g' est positif sur $[1, 2]$ et négatif sur $[2, +\infty[$. La fonction g admet donc un maximum en 2. Or : $g(2) = \dfrac{1}{4}$. D'où : $f'(x) \leq \dfrac{1}{4}$ sur $[\mathrm{e}, +\infty[$.

On en déduit : $\boxed{\forall x \in [\mathrm{e}, +\infty[\quad 0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{4}}$

(d) L'inégalité des accroissements finis est l'énoncé suivant :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Soit } f \text{ une fonction dérivable sur un intervalle }]a,b[\text{ et continue sur } [a,b] \text{ telle} \\ \text{que } : \forall x \in [a,b]\ |f'(x)| \leq M. \text{ Alors, on a } : |f(a) - f(b)| \leq M|b-a|.\end{array}}$$

(e) Montrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}\ |v_n - \mathrm{e}| \leq \dfrac{1}{4^n}$.

Initialisation : On a : $|v_0 - \mathrm{e}| = 3 - \mathrm{e} \leq 1 = \dfrac{1}{4^0}$.
La propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose : $|v_n - \mathrm{e}| \leq \dfrac{1}{4^n}$.
Montrons $|v_{n+1} - \mathrm{e}| \leq \dfrac{1}{4^{n+1}}$.
On applique l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[\mathrm{e}, v_n]$. La fonction f est dérivable sur $[\mathrm{e}, v_n]$ et, par la question 2c la valeur absolue de f' est majorée par $\dfrac{1}{4}$ sur cet intervalle. On obtient ainsi : $|f(v_n) - f(\mathrm{e})| \leq \dfrac{1}{4}|v_n - \mathrm{e}|$.
D'où : $|v_{n+1} - \mathrm{e}| \leq \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{4^n} = \dfrac{1}{4^{n+1}}$.
La propriété est donc héréditaire.

On en déduit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad |v_n - \mathrm{e}| \leq \dfrac{1}{4^n}}$

(f) On a : $4^5 > 1000 = 10^3$.
Donc : $\dfrac{1}{4^{20}} < 10^{-12}$.
D'où, si $n \geq 20$, $\dfrac{1}{4^n} < 10^{-12}$.
Or : $\forall n \in \mathbb{N}\ |v_n - \mathrm{e}| \leq \dfrac{1}{4^n}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que, si } n \geq 20,\ v_n \text{ est une approximation de e à } 10^{-12} \text{ près.}}$$