Lycée Gustave Eiffel | Année 2010-2011
Mathématiques PTSI 2 | Exercice hebdomadaire n°22
Rendu le 30 mars 2011

Polynômes

---

1 Énoncé

Exercice 10. *Quelques divisions euclidiennes*

1. Soit $P=(X-2)^{2n}+(X-3)$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par :
   (a) $(X-1)(X-3)$
   (b) $(X-1)^3$
   (c) $(X-1)^2(X+1)$

Exercice 14.

1. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants : X^5-1, X^6-1, X^8+1.
2. Soient $A=X^{32}-1$ et $B=X^2-\sqrt{2}X+1$ deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que B divise A.

2 Résolution

2.1 Exercice 10

(a) Soit (Q,R) le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)(X-3)$.
On a : $P=(X-1)(X-3)Q+R$.
Donc : $P(1)=R(1)=(-1)^{2n}+(1-3)=-1$ et : $P(3)=R(3)=1^{2n}+0=1$.
Or : $\deg(R)\leq\deg((X-1)(X-3))-1=1$.
Il existe donc $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $R=aX+b$.
D'où : $\begin{cases}R(1)=a+b=-1\\R(3)=3a+b=1\end{cases}\quad(S)$

Or : $(S)\underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Longleftrightarrow}\begin{cases}a+b=-1\\2a=2\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}1+b=-1\\a=1\end{cases}$.

$\Longleftrightarrow\begin{cases}b=-2\\a=1\end{cases}$

On en déduit que : $\boxed{R=X-2}$

(b) Soit (Q,R) le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)^3$.
On a : $P=(X-1)^3Q+R$.
Le nombre 1 est une racine triple de $(X-1)^3Q$.
Donc : $P(1)=R(1)=-1$, $P'(1)=R'(1)$ et $P''(1)=R''(1)$.
Or : $P'=2n(X-2)^{2n-1}+1$ et $P''=2n(2n-1)(X-2)^{2n-2}$.
D'où : $P'(1)=2n(-1)^{2n-1}+1=1-2n$
et : $P''(1)=2n(2n-1)(-1)^{2n-2}=2n(2n-1)$.
On a : $\deg(R)\leq\deg((X-1)^3)-1=2$.
Il existe donc $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que : $R=aX^2+bX+c$.
On a alors : $R'=2aX+b$ et $R''=2a$.
On en déduit : $\begin{cases}R(1)=a+b+c=-1\\R'(1)=2a+b=1-2n\\R''(1)=2a=2n(2n-1)\end{cases}\quad(S)$

Or : $(S)\Longleftrightarrow\begin{cases}c=-1-a-b=-1-n(2n-1)-1+4n^2=-2+n+2n^2\\b=1-2n-2a=1-2n-2n(2n-1)=1-4n^2\\a=n(2n-1)\end{cases}$.

On en déduit que : $\boxed{R=n(2n-1)X^2+(1-4n^2)X-2+n+2n^2}$

(c) Soit (Q,R) le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)^2(X+1)$.
On a : $P=(X-1)^2(X+1)Q+R$.
Le nombre 1 est une racine double de $(X-1)^2(X+1)Q$.
Donc : $P(1)=R(1)=-1$ et $P'(1)=R'(1)=1-2n$.
De plus : $P(-1)=R(-1)=(-3)^2n-4=9^n-4$.
On a : $\deg(R)\leq\deg((X-1)^2(X+1))-1=2$.
Il existe donc $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que : $R=aX^2+bX+c$.
On a alors : $R'=2aX+b$
On en déduit : $\begin{cases}R(1)=a+b+c=-1\\R'(1)=2a+b=1-2n\\R(-1)=a-b+c=9^n-4\end{cases}\quad(S).$

Or : $(S)\underset{L_3\leftarrow L_3-L_1}{\Longleftrightarrow}\begin{cases}a+b+c=-1\\2a+b=1-2n\\-2b=9^n-3\end{cases}$

$\Longleftrightarrow\begin{cases}c=-1-b-a=-1-\dfrac{3-9^n}{2}-\dfrac{9^n-4n-1}{4}=\dfrac{9^n+4n-9}{4}\\a=\dfrac{1-2n-b}{2}=\dfrac{1-2n-\frac{3-9^n}{2}}{2}=\dfrac{9^n-4n-1}{4}\\b=\dfrac{3-9^n}{2}\end{cases}$

On en déduit que : $\boxed{R=\dfrac{9^n-4n-1}{4}X^2+\dfrac{3-9^n}{2}X+\dfrac{9^n+4n-9}{4}}$

2.2 Exercice 14

1. (a) On a : $$\begin{aligned} X^5-1 &= (X-\mathrm{e}^{-\frac{4\mathrm{i}\pi}{5}})(X-\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}})(X-1)(X-\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}})(X-\mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{5}}) \\ &= (X-1)\big((X-\mathrm{e}^{-\frac{4\mathrm{i}\pi}{5}})(X-\mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{5}})\big)\big((X-\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}})(X-\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}})\big) \\ &= (X-1)\big(X^2-(\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}}+\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}})X+1\big)\big(X^2-(\mathrm{e}^{-\frac{4\mathrm{i}\pi}{5}}+\mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{5}})X+1\big) \end{aligned}$$
D'où : $\boxed{X^5-1=(X-1)\left(X^2-2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)X+1\right)\left(X^2-2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)X+1\right)}$

   (b) On a : $$\begin{aligned} X^6-1 &= (X-\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}})(X-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}})(X-1)(X-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}})(X-\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}})(X+1) \\ &= (X-1)(X+1)\big((X-\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}})(X-\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}})\big)\big((X-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}})(X-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}})\big) \\ &= (X-1)(X+1)\big(X^2-(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}+\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}})X+1\big)\big(X^2-(\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}+\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}})X+1\big) \\ &= (X-1)(X+1)\left(X^2-2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)X+1\right)\left(X^2-2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)X+1\right) \end{aligned}$$
D'où : $\boxed{X^5-1=(X-1)(X+1)(X^2-X+1)(X^2+X+1)}$

   (c) On a : $$\begin{aligned} X^8+1 &= X^8-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \\ &= (X-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{8}})(X-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{8}})(X-\mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{8}})(X-\mathrm{e}^{-\frac{3\mathrm{i}\pi}{8}})(X-\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{8}})(X-\mathrm{e}^{-\frac{5\mathrm{i}\pi}{8}}) \\ &= \big(X^2-(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{8}}+\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{8}})X+1\big)\big(X^2-(\mathrm{e}^{-\frac{3\mathrm{i}\pi}{8}}+\mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{8}})X+1\big)\big(X^2-(\mathrm{e}^{-\frac{5\mathrm{i}\pi}{8}}+\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{3}})X+1\big) \end{aligned}$$
D'où : $\boxed{X^8+1=\left(X^2-2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)X+1\right)\left(X^2-2\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)X+1\right)\left(X^2-2\cos\left(5\frac{\pi}{8}\right)X+1\right)}$

2. On a : $$\begin{aligned} X^2-\sqrt{2}X+1 &= (X-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+1/2 \\ &= \left(X-\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(X-\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= (X-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})(X-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}) \end{aligned}$$.

   On a : $A\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^3 2-1=\mathrm{e}^{8\mathrm{i}\pi}-1=0$
   Et : $A\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)=\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^3 2-1=\mathrm{e}^{-8\mathrm{i}\pi}-1=0.$
   Donc : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ sont des racines distinctes de A.
   D'où : $(X-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})(X-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})|A$.
   On en déduit : $\boxed{B|A}$