Lycée Gustave Eiffel Année 2010-2011
Mathématiques PTSI 2 Exercice hebdomadaire n°23
Rendu le 6 avril 2011

Étude d'une fonction

1 Énoncé

Exercice 15. *Étude d'une fonction*

On étudie f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{E}(x)^2 + (2\mathrm{E}(x)+1)(x - \mathrm{E}(x))$.

1. Montrer que, si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors $\mathrm{E}(-x) = -1 - \mathrm{E}(x)$.
2. En déduire que f est paire.
3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Tracer le graphe de $\mathbb{R}$.

2 Résolution

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
On a : $\mathrm{E}(x) \leq x < \mathrm{E}(x)+1$.
Or : $x \notin \mathbb{Z}$ et $\mathrm{E}(x) \in \mathbb{Z}$.
Donc : $\mathrm{E}(x) < x < \mathrm{E}(x)+1$.
D'où : $-\mathrm{E}(x) - 1 < -x < -\mathrm{E}(x) = (-\mathrm{E}(x)-1)+1$.
Or : $-\mathrm{E}(x) - 1 \in \mathbb{Z}$.
Par la définition de la partie entière d'un réel, on en déduit : $\boxed{\mathrm{E}(-x) = -1 - \mathrm{E}(x)}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
On traite deux cas :
   (a) Si $x \notin \mathbb{Z}$:
   D'après la question précédente, on a :
   $$\begin{aligned} f(-x) &= \mathrm{E}(-x)^2 + (2\mathrm{E}(-x)+1)(-x - \mathrm{E}(-x)) \\ &= (-1-\mathrm{E}(x))^2 + \big(2(-1-\mathrm{E}(x))+1\big)\big((-x-(-1-\mathrm{E}(x))\big) \\ &= \mathrm{E}(x)^2 + 2\mathrm{E}(x) + 1 + \big(-2\mathrm{E}(x)-1)(-x+1+\mathrm{E}(x)) \\ &= \mathrm{E}(x)^2 + \big(-2\mathrm{E}(x)-1)(-x+1+\mathrm{E}(x)-1) \\ &= \mathrm{E}(x)^2 + \big(2\mathrm{E}(x)+1)(x-\mathrm{E}(x)) \\ &= f(x) \end{aligned}$$
   (b) Si $x \in \mathbb{Z}$, on a : $\mathrm{E}(x) = x$.
   Donc : $f(x) = x^2 + (2x+1)(x-x) = x^2$.
   Puisque $-x \in \mathbb{Z}$, on a : $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

   Dans tous les cas, $f(-x) = f(x)$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc paire.}}$$

3. La fonction E est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
Par sommes et produits de fonctions, <u>la fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.</u>
Soit $n \in \mathbb{Z}$.
Montrons que f est continue en $\mathbb{Z}$.
   (a) On suppose $x \in [n-1, n[$.
   On a alors : $\mathrm{E}(x) = n-1$.
   Donc : $f(x) = (n-1)^2 + (2(n-1)+1)(x-(n-1))$.
   D'où : $$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow n^-} f(x) &= (n-1)^2 + (2(n-1)+1)(n-(n-1)) \\ &= n^2 - 2n + 1 + (2n-1) = n^2 \end{aligned}$$
   (b) On suppose $x \in [n, n+1[$.
   On a alors : $\mathrm{E}(x) = n$.
   Donc : $f(x) = n^2 + (2n+1)(x-n)$.
   D'où : $\lim_{x \longrightarrow n^+} f(x) = n^2 - 2n + 1(2n-1) = n^2$

   D'où : $\lim_{x \longrightarrow n} f(x) = n^2$.
   Or : $f(n) = n^2 + (2n+1)(n-n) = n^2$.
   Donc : $\lim_{x \longrightarrow n} f(x) = f(n)$.
   <u>La fonction f est donc continue en n.</u>

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc continue sur } \mathbb{R}.}$$

4. Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in [n, n+1[$.
On a alors : $f(x) = n^2 + (2n+1)(x-n)$.
La fonction f est donc affine sur $[n, n+1[$.
De plus, $f(n) = n^2$, $f(n+1) = (n+1)^2$ et la fonction f est continue.

On en déduit le graphe suivant :