Lycée Gustave Eiffel Année 2010-2011
Mathématiques PTSI 2 Exercice hebdomadaire n°24
Rendu le 13 avril 2011

Sous-espaces vectoriels de suites

1 Énoncé

Exercice 14. *Sous-espaces vectoriels de suites*

Soit $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}$
et $G = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 3u_n\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels engendrés par deux vecteurs.
2. Montrer que si $u \in F \cap G$, alors u est une suite géométrique de raison 4.
3. En déduire $F \cap G$.

2 Résolution

1. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
La suite u est un élément de F si, et seulement si, u est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 de polynôme caractéristique :
$$\chi(X) = X^2 - X - 1 = \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = \left(X - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$
Les racines de χ sont $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
La suite est donc un élément de F si, et seulement si, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.
On a donc : $\boxed{F = \text{vect}\left(\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)}$
$\boxed{\text{En particulier, } F \text{ est un sous-espace vectoriel engendré par deux vecteurs.}}$
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
La suite u est un élément de G si, et seulement si, u est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 de polynôme caractéristique :
$$\chi(X) = X^2 - 2X + 3 = (X-1)^2 + 2 = (X - (1+\mathrm{i}\sqrt{2}))(X - (1-\mathrm{i}\sqrt{2}))$$
Les racines de χ sont $1 + \mathrm{i}\sqrt{2}$ et $1 - \mathrm{i}\sqrt{2}$.
La suite est donc un élément de G si, et seulement si, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha(1+\mathrm{i}\sqrt{2})^n + \beta(1-\mathrm{i}\sqrt{2})^n$.
Or : si $\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha(1+\mathrm{i}\sqrt{2})^n + \beta(1-\mathrm{i}\sqrt{2})^n \in \mathbb{R}$, alors : $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$ et $\alpha(1+\mathrm{i}\sqrt{2}) + \beta(1-\mathrm{i}\sqrt{2}) \in \mathbb{R}$.
En soustrayant et en divisant par 2, on obtient : $\mathrm{i}(\alpha - \beta) \in \mathbb{R}$ et donc : $\alpha - \beta \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.
On a donc : $\begin{cases} \alpha + \beta = \bar{\alpha} + \bar{\beta} \\ \alpha - \beta = -\bar{\alpha} + \bar{\beta} \end{cases}$.
Par somme et en divisant par 2, on obtient : $\alpha = \bar{\beta}$.
Réciproquement, si $\alpha = \bar{\beta}$, alors :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha(1+\mathrm{i}\sqrt{2})^n + \beta(1-\mathrm{i}\sqrt{2})^n = \bar{\beta}(1+\mathrm{i}\sqrt{2})^n + \beta(1-\mathrm{i}\sqrt{2})^n = \overline{\beta(1-\mathrm{i}\sqrt{2})^n} + \beta(1-\mathrm{i}\sqrt{2})^n \in \mathbb{R}$$
Donc, la suite est donc un élément de G si, et seulement si, il existe $\beta \in \mathbb{C}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \bar{\beta}(1+\mathrm{i}\sqrt{2})^n + \beta(1-\mathrm{i}\sqrt{2})^n$ si, et seulement si, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$
$$\begin{aligned} u_n &= \overline{a + \mathrm{i}b}(1+\mathrm{i}\sqrt{2})^n + (a+\mathrm{i}b)(1-\mathrm{i}\sqrt{2})^n \\ &= a\left((1+\mathrm{i}\sqrt{2})^n + (1-\mathrm{i}\sqrt{2})^n\right) + b\left((1-\mathrm{i}\sqrt{2})^n - (1+\mathrm{i}\sqrt{2})^n\right) \\ &= 2a\mathrm{Re}((1+\mathrm{i}\sqrt{2})^n) - 2b\mathrm{Im}((1+\mathrm{i}\sqrt{2})^n) \end{aligned}$$
On a donc : $\boxed{G = \text{vect}\left(\left(\mathrm{Re}((1+\mathrm{i}\sqrt{2})^n)\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\mathrm{Im}((1+\mathrm{i}\sqrt{2})^n)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)}$
$\boxed{\text{En particulier, } G \text{ est un sous-espace vectoriel engendré par deux vecteurs.}}$
2. Soit $u \in F \cap G$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n = 2u_{n+1} - 3u_n$.
Donc : $u_{n+1} = 4u_n$.
$\boxed{\text{La suite } u \text{ est une suite géométrique de raison 4.}}$
3. Soit $u \in F \cap G$.
La suite u est une suite géométrique de raison 4. On a donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 4^n$.
On a : $u_2 = u_1 + u_0 = 4u_0 + u_0 = 5u_0$
et : $u_2 = 4^2 u_0 = 16u_0$.
Donc : $5u_0 = 16u_0$. D'où : $u_0 = 0$.
La suite u est donc nulle.
On en déduit $\boxed{F \cap G = \{0\}}$

Remarque 2.1. *Les espaces F et G sont en fait deux plans vectoriels (i.e. deux espaces vectoriels de dimension 2) dont l'intersection est un point. Une telle situation peut se produire si la dimension de l'espace ambiant est plus grande ou égale à 4. Ici, l'espace ambiant est $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui est un espace de dimension infinie.*