Équation différentielle

1 Énoncé

Exercice 41. *Équation différentielle*

On désigne par E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ de l'intervalle $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Pour a un nombre réel non nul, on définit l'application $T_a : \left\{ \begin{array}{lll} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & (x \mapsto axf'(x)+f(x)) \end{array} \right.$

1. Démontrer que T_a est un endomorphisme linéaire de E.
2. Déterminer les éléments du noyau de T_a.
3. Pour $(a,b) \in (\mathbb{R}^*)^2$, déterminer les éléments de $\ker(T_a \circ T_b)$.
4. Former l'équation différentielle du second ordre vérifiée par un élément f de E si, et seulement si, $f \in \ker(T_a \circ T_b)$.
5. On cherche les solutions sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle :
$$(L) \quad x^2y''+4xy'+2y=0$$
   (a) Vérifier que toute solution de (L) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$. (raisonner par récurrence en supposant y de classe $\mathcal{C}^k$).
   (b) Déduire les solutions de (L) de l'étude précédente.

2 Résolution

1. Soit $f \in E$.
La fonction f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donc, f' est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
La fonction $T_a(f) = (x \mapsto axf'(x)+f(x))$ est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ par produit et somme de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.
L'application T_a est bien une application de E dans E.
Soit $(f,g) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
On a :
$$\begin{aligned} T_a(\lambda f+\mu g)(x) &= ax(\lambda f+\mu g)'(x)+(\lambda f+\mu g)(x) \\ &= ax(\lambda f'(x)+\mu g'(x))+\lambda f(x)+\mu g(x) \\ &= \lambda(axf'(x)+f(x))+\mu(axg'(x)+g(x)) \\ &= \lambda T_a(f)(x)+\mu T_a(g)(x) \end{aligned}$$
Donc : $T_a(\lambda f+\mu g) = \lambda T_a(f)+\mu T_a(g)$.
$\boxed{\text{L'application } T_a \text{ est un endomorphisme de } E.}$

2. Soit $f \in E$.
On a :
$$\begin{aligned} f \in \ker(T_a) &\iff \forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad axf'(x)+f(x)=0 \\ &\iff f \text{ est solution de } : axy'+y=0 \quad (E) \end{aligned}$$
Or : $(E) \iff y'+\dfrac{y}{ax}=0$.
Une primitive de $\dfrac{1}{ax}$ est $\dfrac{\ln(x)}{a}$.
La solution générale de l'équation (E) est donc : $\lambda e^{-\frac{\ln(x)}{a}} = \lambda x^{-\frac{1}{a}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
D'où : $\boxed{\ker(T_a) = \text{vect}(x \mapsto x^{-\frac{1}{a}})}$

3. Soit $f \in E$.
On a :
$$\begin{aligned} f \in \ker(T_a \circ T_b) &\iff T_a(T_b(f)) = 0_E \\ &\iff T_b(f) \in \ker(T_a) \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad bxf'(x)+f(x) = \lambda x^{-\frac{1}{a}} \end{aligned}$$
On résout l'équation différentielle : $bxy'+y=\lambda x^{-\frac{1}{a}} \quad (E)$.
Par la question précédente, la solution de l'équation homogène associée à (E) est $\mu x^{-\frac{1}{b}}$.
Par la méthode de variation de la constante, on cherche une solution de (E) sous la forme : $g(x) = \mu(x)x^{-\frac{1}{b}}$.
On a : $g'(x) = \mu'(x)x^{-\frac{1}{b}} - \dfrac{\mu(x)}{b}x^{-\frac{1}{b}-1}$.
Donc : $bxg'(x)+g(x) = bx\left(\mu'(x)x^{-\frac{1}{b}} - \dfrac{\mu(x)}{b}x^{-\frac{1}{b}-1}\right)+\mu(x)x^{-\frac{1}{b}} = b\mu'(x)x^{1-\frac{1}{b}}$.
Ainsi, g est solution de (E) si, et seulement si, μ est solution de l'équation : $b\mu'(x)x^{1-\frac{1}{b}} = \lambda x^{-\frac{1}{a}} \quad (E')$.
On a : $(E') \iff \mu'(x) = \lambda\dfrac{x^{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}-1}}{b}$.
On cherche donc une primitive de $\lambda\dfrac{x^{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}-1}}{b}$.
On traite deux cas :
   (a) <u>Si $a \neq b$</u> : on a : $\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}-1 \neq -1$.
   Une primitive de $\lambda\dfrac{x^{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}-1}}{b}$ est : $\lambda\dfrac{x^{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}}{b\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)} = \dfrac{ax^{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}}{a-b}$.
   Une solution de (E) est donc : $\lambda\dfrac{ax^{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}}{a-b}x^{-\frac{1}{b}} = \lambda\dfrac{ax^{-\frac{1}{a}}}{a-b}$.
   La solution générale de (E) est donc : $\lambda\dfrac{ax^{-\frac{1}{a}}}{a-b}+\mu x^{-\frac{1}{b}}$.

(b) <u>Si $a=b$:</u> on a alors : $\lambda\dfrac{x^{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}-1}}{b}=\dfrac{\lambda}{bx}$.

Une primitive de $\lambda\dfrac{x^{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}-1}}{b}$ est : $\lambda\dfrac{\ln(x)}{b}$.

Une solution de (E) est donc : $\lambda\dfrac{x^{-\frac{1}{b}}\ln(x)}{b}$.

La solution générale de (E) est donc : $\lambda\dfrac{x^{-\frac{1}{b}}\ln(x)}{b}+\mu x^{-\frac{1}{b}}$.

Puisque $\dfrac{a}{a-b}\neq 0$ et $\dfrac{1}{b}\neq 0$, on en déduit que :

$$\boxed{\ker(T_a\circ T_b)=\begin{cases}\text{vect}\left((x\mapsto x^{-\frac{1}{a}}),(x\mapsto x^{-\frac{1}{b}})\right) & \text{si } a\neq b\\ \text{vect}\left((x\mapsto x^{-\frac{1}{b}}),(x\mapsto \ln(x)x^{-\frac{1}{b}})\right) & \text{si } a=b\end{cases}}$$

4. Soit $f\in E$.
Soit $x\in\mathbb{R}^{+*}$.
On a : $T_b(f)(x)=bxf'(x)+f(x)$ et $(T_b(f))'(x)=bxf''(x)+bf'(x)+f'(x)=bxf''(x)+(b+1)f'(x)$.
Donc : $(T_a\circ T_b)(f)(x)=ax\left(bxf''(x)+(b+1)f'(x)\right)+bxf'(x)+f(x)=abx^2f''(x)+(ab+a+b)f'(x)+f(x)$.

Ainsi, les éléments de $\ker(T_a\circ T_b)$ sont les solutions de l'équation différentielle :

$$aby''+(ab+a+b)y'+y=0$$

5. (a) Soit f une solution de (L).
Montrons par récurrence que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$. **Initialisation :** Une solution de (E) est dérivable deux fois. Donc la fonction f est dérivable deux fois. En particulier, f et f' sont continues.
On a : $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\quad x^2f''(x)+4xf'(x)+2f(x)=0$.
Donc : $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\quad f''(x)=-\dfrac{4xf'(x)+2f(x)}{x^2}\quad(\star)$.
Ainsi, par sommes, produits et fractions de fonctions continues, la fonction f'' est continue.
<u>La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^2$.</u>
Hérédité : Soit $k\geq 2$.
On suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^k$.
La fonction f' est donc de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.
Par la relation $(\star)$, la fonction f'' est une fraction de sommes et produits de fonctions de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.
La fonction f'' est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.
La propriété est héréditaire.
Ainsi, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Toute solution de } (L) \text{ est donc une fonction de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]0,+\infty[.}$

(b) On a : $(L)\iff\dfrac{x^2}{2}y''+2xy'+y=0$.

On cherche $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\begin{cases}ab=\dfrac{1}{2}\\ ab+a+b=2\end{cases}\qquad(S)$

On a : $(S)\iff\begin{cases}ab=\dfrac{1}{2}\\ a+b=\dfrac{3}{2}\end{cases}\iff a$ et b sont les racines de : $P=X^2-\dfrac{3}{2}X+\dfrac{1}{2}$.

Or : $P=(X-1)(X-\dfrac{1}{2})$.
Par l'étude précédente, les solutions de (E) sont les éléments du noyau de $T_1\circ T_{\frac{1}{2}}$.
On a : $1\neq\dfrac{1}{2}$.
On a donc : $\ker(T_1\circ T_{\frac{1}{2}})=\text{vect}((x\mapsto x^{-1}),(x\mapsto x^{-2}))$.

$\boxed{\text{La solution générale de } (L) \text{ est donc : } \dfrac{\lambda}{x}+\dfrac{\mu}{x^2} \text{ où } (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.}$