Lycée Gustave Eiffel Année 2010-2011
Mathématiques PTSI 2 Exercice hebdomadaire n°3
Rendu le 29 septembre 2010

Une équation
Exercice n°25 - feuille n°1

1 Énoncé

Exercice 25. *Une équation*

Soit un réel α tel que $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Résoudre :

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}\right)^4 = \frac{1+\mathrm{i}\tan(\alpha)}{1-\mathrm{i}\tan(\alpha)}$$

2 Résolution

On note (E) l'équation à résoudre. Le domaine de définition de (E) est $\mathbb{C}\setminus\{-\mathrm{i}\}$

$$Ona : \frac{1+\mathrm{i}\tan(\alpha)}{1-\mathrm{i}\tan(\alpha)} = \frac{1+\mathrm{i}\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{1-\mathrm{i}\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}} = \frac{\frac{\cos(\alpha)+\mathrm{i}\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{\frac{\cos(\alpha)-\mathrm{i}\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$$

$$Donc : (E) \iff \left(\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}\right)^4 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$$
$$\iff \exists k\in\{0,1,2,3\} \quad \frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha+k\pi}{2}} \qquad (E_k)$$

$Onfixe$:k $\in \{0,1,2,3\}$.

$$\text{On a : } (E_k) \iff 1+\mathrm{i}z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha+k\pi}{2}}(1-\mathrm{i}z)$$
$$\iff \mathrm{i}\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha+k\pi}{2}}\right)z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha+k\pi}{2}} - 1$$

$$\text{Or : } (E'_k) \quad 1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha+k\pi}{2}} = 0 \iff \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha+k\pi}{2}} = -1$$
$$\iff \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha+k\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$$
$$\iff \frac{\alpha+k\pi}{2} = \pi[2\pi]$$
$$\iff \alpha = 2\pi - k\pi[4\pi]$$

Donc, si $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha+k\pi}{2}} = 0$, alors $\alpha = 0[\pi]$, et puisque $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\alpha = 0$.

$$\text{Si } \alpha = 0\text{, on a alors : } (E'_k) \iff k\pi = 2\pi[4\pi]$$
$$\iff k = 2[4]$$
$$\iff k = 2 \qquad (k\in\{0,1,2,3\}$$

On traite deux cas :

1. Si $\alpha \neq 0$ ou $k \neq 2$:

$$\text{On a alors : } (E_k) \iff z = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha+k\pi}{2}} - 1}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha+k\pi}{2}}} \quad \left(\frac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}\right)$$
$$\iff z = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha+k\pi}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha+k\pi}{4}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha+k\pi}{2}}\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha+k\pi}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha+k\pi}{4}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha+k\pi}{2}}\right)}$$
$$\iff z = -\mathrm{i}\frac{2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\alpha+k\pi}{4}\right)}{2\cos\left(\frac{\alpha+k\pi}{4}\right)}$$
$$\iff z = \tan\left(\frac{\alpha+k\pi}{4}\right)$$

2. Si $\alpha = 0$ ou $k = 2$:
On a alors : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha+k\pi}{2}} = -1$. Donc : $(E_k) \iff 0 = -2$.
L'équation n'a donc pas de solution.

Ainsi, si $\alpha = 0$, les solutions de (E) sont $\tan(0) = 0$, $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ et $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$.
Les solutions trouvées sont réelles. Elles sont bien toutes dans le domaine de définition de (E),C$\setminus\{-\mathrm{i}\}$.

L'ensemble des solutions de l'équation est donc :
$$\begin{cases} \left\{\tan\left(\frac{\alpha}{4}\right), \tan\left(\frac{\alpha+\pi}{4}\right), \tan\left(\frac{\alpha+2\pi}{4}\right), \tan\left(\frac{\alpha+3\pi}{4}\right)\right\} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ \{0,1,-1\} & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$