Lycée Gustave Eiffel
Mathématiques PTSI 2
Rendu le 6 octobre 2010

Année 2010-2011
Exercice hebdomadaire n°3

Étude d'une similitude
Exercice n°39 - feuille n°1

1 Énoncé

Exercice 39. *Étude d'une similitude*

On désigne par T l'application du plan dont la représentation complexe est la suivante $z' = (1+\mathrm{i})z - \mathrm{i}$, $z \in \mathbb{C}$. Soient M et M' deux points du plan tel que $M' = T(M)$.

1. (a) Montrer que T est une similitude directe du plan dont on donnera les élèments caractéristiques.
   On notera A le point invariant de T.

   (b) Déterminer la nature du triangle AMM'.

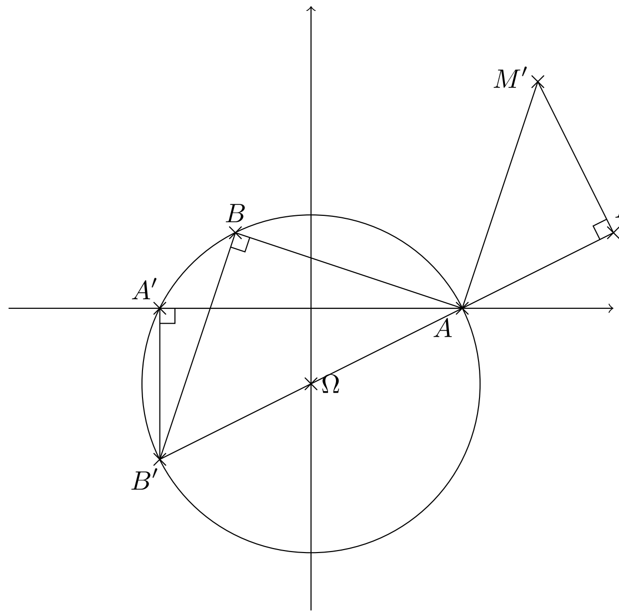
2. Déterminer l'image de D' par T de la droite D d'équation $y = x$.

3. (a) Montrer qu'il existe un point B du plan distinct de A et un seul tel que les affixes z_0 de B et z'_0 de $B' = T(B)$ soient liées par la relation $z_0 z'_0 = 1$.

   (b) Soit A' le symétrique de A par rapport à O l'origine du plan. Montrer que les points A, A', B et B' sont cocycliques, *i*.e. sont quatres points d'un cercle que l'on caractérisera.

Indication : faire une figure.

2 Résolution



1. (a) L'application T admet une représentation complexe de la forme $z' = az + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Plus précisément, on a : $a = (1+i)$ et $b = -i$.
   On a : $a = 1 + i = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
   Le rapport de T est donc $\sqrt{2}$ et son angle est $\dfrac{\pi}{4}$.
   Pour déterminer le centre, on résout l'équation : $z' = z \quad (E_1)$.
   On a : $(E_1) \iff (1+i)z - i = z \iff iz = i \iff z = 1$.
   $\boxed{\text{L'application } T \text{ est donc une similitude de centre } A(1)\text{, de rapport } \sqrt{2} \text{ et d'angle } \dfrac{\pi}{4}.}$

   (b) On note a l'affixe de A, z l'affixe de M et z' l'affixe de M'.
   L'affixe de $\overrightarrow{MA}$ est $a - z$ et celle de $\overrightarrow{MM'}$ est $z' - z$.
   On a : $z' - z = (1+i)z - i - z = iz - i = -i(1-z) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(1-z)$.
   On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont orthogonaux et de même norme.
   $\boxed{\text{On en déduit que le triangle } AMM' \text{ est rectangle isocèle en } M.}$

2. Soit $N \in D$. On pose $N' = T(N)$
   Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que l'affixes de N soit $a + ia$.
   L'affixe de N' est donc : $(1+i)(a+ia) - i = 2ia - i = (2a-1)i$. Elle est donc

un imaginaire pur.
L'ensemble D' est donc inclus dans l'axe des ordonnées.
Réciproquement, soit P' un point de l'axe des ordonnées. Il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que l'affixe de P' soit ib.
On cherche $a \in \mathbb{R}$ tel que le point P d'affixe $a + ia$ vérifie : $T(P) = P'$.
D'après le calcul précédent, il suffit de résoudre : $(2a-1)i = ib \quad (E_2)$.
On a : $(E_2) \iff 2a - 1 = b \iff a = \frac{1}{2}(b+1)$.
Donc $a = \frac{1}{2}(b+1)$.
Par conséquent, l'axe des ordonnées est inclus dans D'.

$\boxed{\text{On en déduit que } D' \text{ est l'axe des ordonnées.}}$

3. (a) On résout l'équation $z_0 z_0' = 1 \quad (E_0)$.

On a :
$$\begin{aligned}(E_0) &\iff z_0((1+i)z_0 - i) = 1 \\ &\iff (1+i)z_0^2 - iz_0 - 1 = 0 \\ &\iff (z_0 - 1)\big((1+\mathrm{i})z + 1\big) = 0 \\ &\iff z_0 = 1 \text{ ou } z = -\frac{1}{1+\mathrm{i}} = \frac{-1+\mathrm{i}}{2}\end{aligned}$$

Puisque l'affixe de A est 1, il existe un unique point B d'affixe z_0 tel que les affixes z_0 de B et z_0' de $B' = T(B)$ soient liées par la relation $z_0 z_0' = 1$.
De plus, $z_0 = \frac{-1+i}{2}$.

(b) Puisque l'affixe de A est 1, l'affixe de A' est -1.

L'affixe de B' est $\frac{1}{\frac{-1+i}{2}} = -1 - i$.

D'après la question 1.(b), le triangle ABB' est rectangle en B.
On note a' l'affixe de A'.
On a : $\frac{a - a'}{z_0' - a'} = \frac{1-(-1)}{-1-i-(-1)} = 2i$
Le triangle $AA'B'$ est donc rectangle en A'.
Les triangles ABB' et $AA'B'$ sont rectangles et ont la même hypoténuse $[AB']$. Leur cercle circonscrit $\mathcal{C}$ sont donc confondus. De plus, le centre Ω de $\mathcal{C}$ est le milieu de $[AB']$.
Son affixe est : $\omega = \frac{a + z_0'}{2} = \frac{1+(-1-i)}{2} = -\frac{i}{2}$.
On a : $\Omega A = |a - \omega| = \left|1 - \left(-\frac{i}{2}\right)\right| = \left|\frac{2+i}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$

On en déduit que les points A, A', B et B' sont cocycliques.
De plus, ils appartiennent au cercle de centre $\Omega\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.