**Lycée Gustave Eiffel**
Mathématiques PTSI 2
Rendu le 13 octobre 2010

Année 2010-2011
Exercice hebdomadaire n°5

**Étude d'une fonction**
**Exercice n°14 - feuille n°2**

# 1 Énoncé

**Exercice 14.** *Etude d'une fonction.*

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de $f$.
2. Dresser le tableau de variations de $f$.
3. Etudier la convexité de $f$. Montrer que $f$ possède un unique point d'inflexion que l'on déterminera.
4. Montrer que ce point est un centre de symétrie du graphe de $f$.
5. Montrer que $f$ est une bijection entre deux ensembles que l'on précisera. Donner une expression de $f^{-1}$.

# 2 Résolution

1. On a : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^x > 0$.
   Donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1+\mathrm{e}^x > 0$.
   $\boxed{\text{On en déduit que le domaine de définition de } f \text{ est } \mathbb{R}.}$
2. Calculons tout d'abord les limites de $f$.
   On a : $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \mathrm{e}^x = 0$.
   Donc : $\underline{\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 0}$.
   On a : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-x})} = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.
   Or : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$.
   D'où : $\underline{\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 1}$
   La fonction $f$ est une fraction de fonctions dérivables. Donc, $f$ est dérivable.
   De plus, : $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x) - \mathrm{e}^x.\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} > 0$.

   On en déduit le tableau de variations suivant :

   | $x$ | $0$ | $+\infty$ |
   |---|---|---|
   | $f'(x)$ | $+$ | |
   | $f(x)$ | $0$ ↗ | $1$ |

3. La fonction $f'$ est une fraction de fonction dérivable. Donc, $f'$ est dérivable.
   De plus, $f''(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} - \dfrac{2\mathrm{e}^x.\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^3} = \dfrac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x) - 2\mathrm{e}^{2x}}{(1+\mathrm{e}^x)^3} = \dfrac{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)^3}$.
   Le signe de $f''(x)$ est donc celui de $1-\mathrm{e}^x$.

   > La fonction $f$ est donc concave sur $\mathbb{R}^+$ et convexe sur $\mathbb{R}^-$.
   > Le point $(0, f(0)) = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ est l'unique point d'inflexion du graphe de $f$.

4. Il suffit de montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = 2\dfrac{1}{2} - f(x)$.
   Or : $$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x.\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-x})} \\ &= \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} \\ &= \frac{1+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} \\ &= 1 - \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} \\ &= 1 - f(x) \end{aligned}$$

   > On en déduit que le point d'inflexion de coordonnées $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie du graphe de $f$.

5. La fonction $f$ est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$.
   On a : $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 0$
   et : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 1$.

$$\boxed{\text{Le fonction } f \text{ est un bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } ]0,1[.}$$

Pour déterminer une expression de $f^{-1}$, on résout l'équation :

$$f(x) = y \qquad (E)$$

où $y \in ]0,1[$.
En effet, on a : $(E) \iff x = f^{-1}(y)$.
D'autre part, on a : $(E) \iff \dfrac{e^x}{1+e^x} = y$

$$\iff e^x = (1+e^x)y$$

$$\iff (1-y)e^x = 1$$

Or : $y \in ]0,1[$. Donc : $1 - y > 0$.
D'où : $(E) \iff e^x = \dfrac{1}{1-y}$

$$\iff x = \ln\left(\frac{1}{1-y}\right) \quad \iff x = -\ln(1-y)$$

On en déduit : $\boxed{\forall y \in ]0,1[ \quad f^{-1}(y) = \ln(1-y)}$

On a les figures suivantes :