Étude d'une fonction
Exercice n°14 - feuille n°2

1 Énoncé

Exercice 15. *Etude d'une fonction*

Soit f la fonction définie par l'expression suivante : $f(x) = \sqrt{\dfrac{\ln(x)}{x}}$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer la tangente du graphe de f en 1.
3. Étudier le comportement asymptotique en $+\infty$ de f.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Etudier la convexité de f. Montrer que f possède un unique point d'inflexion que l'on déterminera.
6. Représenter graphiquement la fonction f.

2 Résolution

1. La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   On suppose donc : $x > 0$.
   On a : $\dfrac{\ln(x)}{x} \geq 0 \iff \ln(x) \geq 0 \iff x \geq 1$.
   $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc définie sur } [1, +\infty[.}$

2. On a : $\dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \dfrac{f(x)}{x-1} = \dfrac{\sqrt{\ln(x)}}{(x-1)\sqrt{x}}$.
   Or : $x - 1 \geq 0$.
   Donc : $\dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \dfrac{\sqrt{\ln(x)}}{\sqrt{(x-1)^2}\sqrt{x}} = \sqrt{\dfrac{\ln(x)}{x-1}} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
   Or : $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = \ln'(1) = 1$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 1$.
   D'où : $\underline{\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = +\infty}$
   $\boxed{\text{On en déduit que la fonction } f \text{ admet en 1 un asymptote verticale.}}$

3. Par les croissances comparées, on a : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.
   D'où : $\boxed{\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0}$
   $\boxed{\text{Le graphe de la fonction } f \text{ admet donc une asymptote d'équation } y = 0.}$

4. Sur $]1, +\infty[$, la fonction $\left(x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}\right)$ est une fraction de fonctions dérivable.
   Elle est donc dérivable.
   De plus, on a : $\forall x > 1 \quad \dfrac{\ln(x)}{x} > 0$.
   Puisque la fonction $\sqrt{}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, la fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$.
   On a : $f'(x) = \left(\dfrac{\frac{1}{x}.x - \ln(x)}{x^2}\right) \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{\ln(x)}{x}}} = \dfrac{1 - \ln(x)}{2x\sqrt{x\ln(x)}}$.
   Ainsi, $f'(x)$ est du même signe que $1 - \ln(x)$.
   Or : $1 - \ln(x) \geq 0 \iff \ln(x) \leq 1 \iff x \leq \mathrm{e}$.
   On a donc le tableau de variations suivant :

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

5. La fonction f' est une fraction de fonctions dérivables sur $]1, +\infty[$. Elle est donc dérivable.
   On a : $f'(x) = \dfrac{1}{2} . \dfrac{1 - \ln(x)}{\ln^{\frac{1}{2}}(x)} . x^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{2}\left(\ln^{-\frac{1}{2}}(x) - \ln^{\frac{1}{2}}(x)\right) x^{-\frac{3}{2}}$.
   Donc : $f''(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}\left(-\dfrac{1}{2}\ln^{-\frac{3}{2}}(x) - \dfrac{1}{2}\ln^{-\frac{1}{2}}(x)\right).x^{-\frac{3}{2}} - \dfrac{3}{2}\left(\ln^{-\frac{1}{2}}(x) - \ln^{\frac{1}{2}}(x)\right)x^{-\frac{5}{2}}\right)$
   $$= \frac{1}{4}\left(-\ln^{-\frac{3}{2}}(x) - 4\ln^{-\frac{1}{2}}(x) + 3\ln^{\frac{1}{2}}(x)\right).x^{-\frac{5}{2}}$$
   $$= \frac{3\ln^2(x) - 4\ln(x) - 1}{4\ln^{\frac{3}{2}}(x).x^{\frac{5}{2}}}$$
   Le signe de $f''(x)$ est celui de $3\ln^2(x) - 4\ln(x) - 1$.
   On pose $X = \ln(x)$.
   On cherche les racines du polynôme $3X^2 - 4X - 1$.
   Son discriminant est : $\Delta = 28 = (2\sqrt{7})^2$.

Ses racines sont donc : $\dfrac{4+2\sqrt{7}}{6} = \dfrac{2+\sqrt{7}}{3}$ et $\dfrac{4-2\sqrt{7}}{6} = \dfrac{2-\sqrt{7}}{3}$.

On a donc : $3X^2 - 4X - 1 = 3\left(X - \dfrac{2+\sqrt{7}}{3}\right)\left(X - \dfrac{2-\sqrt{7}}{3}\right)$.

D'où : $3\ln^2(x) - 4\ln(x) - 1 = 3\left(\ln(x) - \dfrac{2+\sqrt{7}}{3}\right)\left(\ln(x) - \dfrac{2-\sqrt{7}}{3}\right)$.

Or : $\ln(x) - \dfrac{2-\sqrt{7}}{3} > 0 \iff x > \exp\left(\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}\right)$.

De plus : $\dfrac{2-\sqrt{7}}{3} < 0$. Donc : $\exp\left(\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}\right) < 1$.

Puisque $x \geq 1$, on en déduit que : $\ln(x) - \dfrac{2-\sqrt{7}}{3} > 0$. Le signe de $f''(x)$ est donc celui de $\ln(x) - \dfrac{2+\sqrt{7}}{3}$.

Or : $\ln(x) - \dfrac{2+\sqrt{7}}{3} \geq 0 \iff x \geq \exp\left(\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}\right)$

On a donc le tableau de signe suivant :

x	1		$\mathrm{e}^{\frac{2+\sqrt{7}}{3}}$		$+\infty$
$f''(x)$	||	$-$	0	$+$	

On en déduit que la fonction f est concave sur $\left]1, \exp\left(\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}\right)\right]$ et convexe sur $\left[\exp\left(\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}\right), +\infty\right[$. Elle admet un point d'inflexion en $\exp\left(\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}\right)$.

6. On donne les approximations à 10^{-2} près suivante : $\mathrm{e} \approx 2,72$, $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 0,61$, $\exp\left(\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}\right) \approx 4,70$, $f\left(\exp\left(\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}\right)\right) \approx 0,57$ et $f'\left(\exp\left(\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}\right)\right) \approx -0,02$.
   On a la figure suivante :