Une équation de Bernoulli
Exercice n°5 - feuille n°3

1 Énoncé

Exercice 5. *Une équation de Bernoulli*

On se propose de déterminer les fonctions dérivables strictement positives solutions de l'équation différentielle suivante : $(E) \quad y' - y = \mathrm{e}^x \sqrt{y}$.
On pose $z = \sqrt{y}$.

1. Montrer que y est solution de (E) si, et seulement si, z est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre (E').
2. Résoudre (E').
3. En déduire les solutions de (E) et préciser leurs domaines de définition.

2 Résolution

1. Puisque la fonction y est strictement positive et dérivable, la fonction z est dérivable.
   On a : $z' = \dfrac{y'}{2\sqrt{y}}$.
   Or, on a :
   $$\begin{aligned}(E) &\iff \frac{y'}{\sqrt{y}} - \sqrt{y} = \mathrm{e}^x.\\ &\iff 2z' - z = \mathrm{e}^x \\ &\iff z' - \frac{z}{2} = \frac{\mathrm{e}^x}{2}\end{aligned}$$
   La fonction y est solution de (E) si, et seulement si, z est solution de l'équation différentielle :
   $$z' - \frac{z}{2} = \frac{\mathrm{e}^x}{2} \quad (E')$$
2. L'équation différentielle homogène associé à (E') est : $z' - \dfrac{z}{2} = 0 \quad (E'_0)$.
   Une primitive de $-\dfrac{1}{2}$ est $-\dfrac{1}{2}x$.
   La solution générale de (E'_0) est : $\lambda \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
   La fonction $(x \mapsto \mathrm{e}^x)$ est une solution évidente de (E').

   La solution générale de (E') est donc :
   $$\mathrm{e}^x + \lambda \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$$
   où $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. On a donc : $(E) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \sqrt{y(x)} = \mathrm{e}^x + \lambda \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.
   La fonction z est strictement positive. Il faut étudier le signe de $\mathrm{e}^x + \lambda \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.
   On traite deux cas :

   (a) Si $\lambda \geq 0$, alors : $\lambda \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \geq 0$.
   Or : $\mathrm{e}^x > 0$.
   Donc : $\mathrm{e}^x + \lambda \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} > 0$

   (b) Si $\lambda < 0$:
   On a :
   $$\begin{aligned}\mathrm{e}^x + \lambda \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} > 0 &\iff \mathrm{e}^x > -\lambda \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \quad . \\ &\iff x > \ln(-\lambda) + \frac{x}{2} \\ &\iff \frac{x}{2} > \ln(-\lambda) \\ &\iff x > 2\ln(-\lambda)\end{aligned}$$

   On en déduit que la solution générale de (E) est donc :
   $$y(x) = \left(\mathrm{e}^x + \lambda \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2$$
   où $\lambda \in \mathbb{R}$ et y est définie sur $\mathbb{R}$ si $\lambda \geq 0$ et sur $]2\ln(-\lambda), +\infty[$ si $\lambda < 0$.