Lycée Gustave Eiffel Année 2010-2011
Mathématiques PTSI 2 Exercice hebdomadaire n°9
Rendu le 1 décembre 2010

Changement de repère
Exercice n°1 - feuille n°4

1 Énoncé

On considère un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'un plan $\mathcal{P}$.

Exercice 1. *(Changement de repère)*

Soit $\mathcal{R}' = (O', \vec{\mathrm{i}'}, \vec{\jmath'})$ un repère du plan $\mathcal{P}$. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ les coordonnées respectives de O', $\vec{\mathrm{i}'}$ et $\vec{\jmath'}$ dans le repère $\mathcal{R}$.
Soit P un point du plan. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ les coordonnées du point P dans les repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.

1. Exprimer x et y en fonction de x' et de y'.
2. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.

Indication : Calculer $\det(\vec{\mathrm{i}'}, \vec{\jmath'})$. Que dire de ce nombre ?

2 Résolution

1. Les coordonnées du point M dans $\mathcal{R}$ sont : (x, y).
   Donc : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.
   D'autre part, on a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ $(\sharp)$.
   Or : $O'(\alpha, \beta)$ dans le repère $\mathcal{R}$. Donc : $\overrightarrow{OO'} = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath}(\flat)$.
   Les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}'$ sont : (x', y').
   Donc : $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{\mathrm{i}'} + y'\vec{\jmath'}$.
   Les coordonnées de $\vec{\mathrm{i}'}$ et $\vec{\jmath'}$ sont respectivement (x_1, y_1) et (x_2, y_2).
   Donc : $\vec{\mathrm{i}'} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath}$ et $\vec{\mathrm{i}'} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath}$.
   D'où : $\overrightarrow{O'M} = x'(x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath}) + y'(x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath})$.
   $= (x'x_1 + y'x_2)\vec{\imath} + (x'y_1 + y'y_2)\vec{\jmath} \quad (\natural)$
   Par les relations $(\sharp)$, $(\flat)$ et $(\natural)$, on obtient :
   $\overrightarrow{OM} = (\alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath}) + ((x'x_1 + y'x_2)\vec{\imath} + (x'y_1 + y'y_2)\vec{\jmath})$
   $= (\alpha + x'x_1 + y'x_2)\vec{\imath} + (\beta + x'y_1 + y'y_2)\vec{\jmath}$
   Par l'unicité des coordonnées, on en déduit :
   $$\boxed{\begin{cases} x = \alpha + x'x_1 + y'x_2 \\ y = \beta + x'y_1 + y'y_2 \end{cases}}$$

2. On obtient donc : $\begin{cases} x'x_1 + y'x_2 = x - \alpha & (L_1) \\ x'y_1 + y'y_2 = y - \beta & (L_2) \end{cases}$
   On a donc : $\begin{cases} x'(x_1y_2 - y_1x_2) & = y_2(x - \alpha) - x_2(y - \beta) & (y_2L_1 - x_2L_2) \\ y'(y_1x_2 - x_1y_2) & = y_1(x - \alpha) - x_1(y - \beta) & (y_1L_1 - x_1L_2) \end{cases}$
   Or : $\det(\vec{\mathrm{i}'}, \vec{\jmath'}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - y_1x_2$.
   Puisque $(\vec{\mathrm{i}'}, \vec{\jmath'})$ est une base, on en déduit que : $x_1y_2 - y_1x_2 \neq 0$.
   D'où : $\boxed{\begin{cases} x' & = \dfrac{y_2(x - \alpha) - x_2(y - \beta)}{x_1y_2 - y_1x_2} \\ y' & = \dfrac{y_1(x - \alpha) - x_1(y - \beta)}{y_1x_2 - x_1y_2} \end{cases}}$

   Remarque 2.1. *Remarquons que :* $\begin{cases} x' = \dfrac{\det(\overrightarrow{O'M}, \vec{\jmath'})}{\det(\vec{\mathrm{i}'}, \vec{\jmath'})} \\ y' = \dfrac{\det(\vec{\mathrm{i}'}, \overrightarrow{O'M})}{\det(\vec{\mathrm{i}'}, \vec{\jmath'})} \end{cases}$
   Ces formules sont appelées formule de Cramer d'ordre 2.