Lycée Gustave Eiffel Année 2011-2012
Mathématiques PTSI DM n°1
A rendre le 7 octobre 2011

Nombre complexes et trigonométrie

Exercice 1. *Une équation de degré* 3

On considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivante :

$$z^3 + 6z - 2 = 0 \quad (E)$$

On pose : $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Justifier l'existence de deux nombres complexes u et v tels que :
$$\begin{cases} u + v = z \\ uv = -2 \end{cases} \qquad (S)$$
2. On suppose que z est une solution de (E) et que u et v vérifient les relations (S).
   (a) Montrer que : $u^3 + v^3 = 2$
   (b) Montrer que u^3 et v^3 sont les solutions d'une équation du second degré que l'on précisera.
   (c) On suppose, de plus, que : $|u| < |v|$. En déduire les valeurs de u^3 et v^3.
   (d) Préciser les trois valeurs possibles pour le couple (u, v).
   (e) En déduire qu'il existe $k \in \{0, 1, 2\}$ tel que : $z = j^k \sqrt[3]{4} - j^{2k} \sqrt[3]{2}$.
3. En déduire la forme algébrique des solutions de (E).

Exercice 2. *Étude d'une somme*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.
On souhaite étudier la somme suivante :

$$S = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \cos(2kx)$$

1. Montrer que : $S = \begin{cases} \dfrac{\sin(2nx)\sin\big((2n-1)x\big)}{\cos(x)} & \text{si } x \neq \dfrac{\pi}{2}[\pi] \\ 2n & \text{si } x = \dfrac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$.
2. Uniquement pour cette question, on suppose $n = 2$ et $x = \dfrac{\pi}{12}$.
   Déduire de la formule précédente la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
3. (a) **Question de cours :** Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
   Rappeler la formule de $\cos^2(\theta)$ en fonction de $\cos(2\theta)$.
   (b) En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \cos^2(kx)$

Problème 1. *Étude d'une transformation du plan*

On note $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère orthonormé direct.
On considère l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & 2z(1-z) \end{array} \right.$$

On désigne également par F l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui au point $M(z)$ d'affixe z fait correspondre le point $M' = F(M)$ d'affixe $z' = f(z)$.

Partie I

1. Quels sont les points invariants par F (c'est à dire les points M tels que $F(M) = M$) ?
2. Quels sont les points ayant pour image le point A d'affixe -4 ?
3. Quels sont les points ayant pour image le point B d'affixe $2 + 2\mathrm{i}$?
4. Soient M_1 et M_2 deux points du plan d'affixes respectives z_1 et z_2 tels que $z_1 \neq z_2$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur z_1 et z_2 pour que $F(M_1) = F(M_2)$. Donner une interprétation géométrique à cette condition en termes du milieu du segment $[M_1, M_2]$.
5. Déterminer l'ensemble des points M du plan ayant un antécédent par F (c'est à dire tels qu'il existe un point N pour lequel $F(N) = M$).
6. Quels sont les points du plan ayant un et un seul antécédent par F ?

Partie II

1. Soit $\mathcal{D}_1$ la droite du plan d'équation $y = 0$.
   (a) Déterminer l'image de $\mathcal{D}_1$ par F (c'est à dire l'ensemble des points $F(M)$ lorsque M décrit $\mathcal{D}_1$).
   (b) i. Soit $z \in \mathbb{C}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante simple pour que $f(z)$ soit un nombre réel.
   ii. En déduire l'image réciproque de $\mathcal{D}_1$ par F (c'est à dire l'ensemble des points M du plan tels que $F(M) \in \mathcal{D}_1$).
2. Soit $\mathcal{D}_2$ la droite d'équation $x = 0$. Soit $(\mathcal{C})$ la courbe du plan d'équation $x = \dfrac{y^2}{2}$.
   (a) Dessiner la courbe $(\mathcal{C})$.
   (b) Montrer que l'image directe de $\mathcal{D}_2$ par F est la courbe $(\mathcal{C})$.
   (c) Soit $z \in \mathbb{C}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante simple pour que $f(z)$ soit un imaginaire pur, puis donner une équation simple de la courbe image réciproque de $\mathcal{D}_2$ par F.
   On ne cherchera pas à tracer cette courbe.
3. Soit $\mathcal{C}_1 = \{M(x, y) \in \mathcal{P} / x^2 + y^2 = 1 \text{ et } y \geq 0\}$.
   (a) Soit $t \in [0, \pi]$. Soit $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Calculer le module r et un argument θ de $f(z)$ en fonction de t.
   (b) Soit $\Gamma_1 = F(\mathcal{C}_1)$. Représenter les points d'affixe $f(z)$ lorsque $t \in \left\{0, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{6}, \pi\right\}$.
   Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}_1$. On admettra que cette courbe admet une tangente verticale aux points $F(1, 0)$ (obtenu lorsque $t = 0$) et $F(-1, 0)$ (obtenu lorsque $t = \pi$).
   (c) Soit, de même, $\mathcal{C}_2 = \{M(x, y) \in \mathcal{P} / x^2 + y^2 = 1 \text{ et } y \leq 0\}$. Démontrer que l'on peut déduire $\mathcal{C}_2$ de $\mathcal{C}_1$ par une transformation géométrique simple.
   (d) Dessiner l'image directe par F du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.