Lycée Gustave Eiffel Année 2011-2012
Mathématiques PTSI DM n°2
A rendre le 3 novembre 2011

Fonctions et équations différentielles

Exercice 1. *Étude d'une équation différentielle*

On se propose de résoudre l'équation :

$$|x|y' - 2y = x^2 \qquad (E)$$

1. **Résolution de l'équation sur $\mathbb{R}^{+*}$**
   (a) Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   La solution générale sur $\mathbb{R}^{+*}$ sera exprimée à l'aide d'une variable notée λ.
   (b) Déterminer en fonction de λ la limite de cette solution générale en 0^+.
2. **Résolution de l'équation sur $\mathbb{R}^{-*}$**
   (a) Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}^{-*}$.
   La solution générale sur $\mathbb{R}^{-*}$ sera exprimée à l'aide d'une variable notée μ.
   (b) Déterminer en fonction de μ la limite de cette solution générale en 0^-.
3. Préciser la valeur en 0 d'une solution de (E).
4. En déduire les solutions de (E) définie sur $\mathbb{R}$.
   Indication : Il sera nécessaire d'étudier la dérivabilité en 0 des solutions proposées.

Exercice 2. *Étude d'une fonction*

Soit la fonction f définie par $f(x) = \operatorname{argch}\left(\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{ch}x}{2}}\right) - \dfrac{x}{2}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f, le domaine de continuité de f et le domaine de dérivabilité de f.
2. Calculer $f'(x)$ (on pourra envisager deux cas).
3. En déduire une expression simple de f sur $D \cap \mathbb{R}^+$ et $D \cap \mathbb{R}^-_*$.
4. Représenter graphiquement f.

Problème 1. *Étude d'une suite de fonctions*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par f_n la fonction définie par :

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \ln(1+x) \end{array} \right.$$

On note (Γ_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal.

Partie A : Étude et représentation des fonctions.

1. Soit $h_n : \left\{ \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & n\ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x} \end{array} \right.$.
   Étudier les variations de h_n.
2. En déduire les variations de la fonction f_n sur $]-1,+\infty[$ (on discutera suivant la parité de n).
   Dresser les tableaux de variations correspondant aux différents cas de figure et préciser les limites en -1 et en $+\infty$.
3. Trouver deux points communs aux courbes (Γ_n).
4. (a) Pour $x > 0$, déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
   (b) Pour $x \in]-1,0[$, déterminer le signe de $f_3(x) - f_1(x)$.
   (c) Tracer avec soin les courbes (Γ_1), (Γ_2) et (Γ_3). (échelle 2cm)
   On donne : $\ln(2) \simeq 0,693$.

Partie B : Étude d'une suite.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence d'un unique élément a_n de $\mathbb{R}^{+*}$ vérifiant $f_n(a_n) = 1$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n > 1$.
3. Comparer $f_n(a_n)$ et $f_{n+1}(a_n)$ puis $f_{n+1}(a_n)$ et $f_{n+1}(a_{n+1})$.
   En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et préciser sa monotonie.
4. (a) Déterminer $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

   Indication : On rappelle la limite usuelle : $\lim\limits_{u\longrightarrow 0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$.

   (b) En déduire que : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = 1$.

   On rappelle que : $e \simeq 2,718$.

   Indication : On pourra utiliser le résultat suivant :

   "Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels convergeant vers $L \in \mathbb{R}$ et $l < L$.
   Alors, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0 \quad u_n \geq l$.
   i.e. à partir d'un certain rang, on a : $u_n \geq l$."