
Équations différentielles - Géométrie

Exercice 1. Une équation différentielle du second ordre

Soit k et ω deux réels strictement positifs. On considère l'équation suivante :

$$y'' + k^2 y = \cos(\omega t) \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation (E) .

Indication : Une distinction de cas sera nécessaire.

2. (a) Déterminer la solution y_ω de (E) telle que : $y_\omega(0) = y'_\omega(0) = 0$.
(b) Montrer que la fonction y_ω est toujours bornée sauf si ω est égale à un nombre réel ω_0 que l'on exprimera en fonction de k .

Indication : Pour ce cas particulier, on déterminera une suite (u_n) telle que : $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{\omega_0}(u_n) = +\infty$.

- (c) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R} \quad \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} y_\omega(t) = y_{\omega_0}(t)$.

Indication : On pourra exprimer $y_\omega(t)$ uniquement en fonction de t , ω et ω_0 .

- (d) Pour tout ω distinct de ω_0 , on note m_ω et M_ω deux réels tels que : $\forall t \in \mathbb{R} \quad m_\omega \leq y_\omega(t) \leq M_\omega$.
Par une simple interprétation (*i.e.* sans en donner une preuve rigoureuse), que peut-on dire de m_ω et M_ω lorsque ω tend vers ω_0 ?

Exercice 2. Une équation linéaire d'ordre 3

On veut résoudre l'équation suivante :

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = x^2 + x + 1 + \frac{2xe^x}{(1+x^2)^2} \quad (E)$$

On note (E_0) l'équation différentielle suivante :

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0 \quad (E_0)$$

Cette équation est appelée équation homogène associée à (E) .

1. **Structure des solutions de (E) :**

- (a) Soient f une fonction trois fois dérivable et f_p une solution particulière de (E) .
Montrer que la fonction f est une solution de (E) si, et seulement si, la fonction $f - f_p$ est une solution de (E_0) .
(b) Soit f_1 une solution particulière de l'équation suivante :

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = x^2 + x + 1 \quad (E_1)$$

Soit f_2 une solution particulière de l'équation suivante :

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = \frac{2xe^x}{(1+x^2)^2} \quad (E_2)$$

Montrer que $f_1 + f_2$ est une solution de (E) .

2. **Résolution de l'équation homogène :**

- (a) Vérifier que e^x est solution de (E_0) .
(b) Soit f une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit g la fonction telle que $f(x) = e^x g(x)$ pour tout x réel (on justifiera proprement l'existence de g).
Déterminer (E') une équation linéaire d'ordre 3 très simple telle que :
 f est solution de (E_0) si et seulement si g est solution de (E') .
(c) Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E_0) .

3. **Résolution de (E) :**

- (a) Déterminer une solution particulière de (E_1) .
(b) En s'inspirant de la question (2b), déterminer une solution particulière de (E_2) .
(c) En déduire, sans calcul supplémentaire, la solution générale de (E) .

Exercice 3. Points alignés

On considère deux droites parallèles distinctes Δ et Δ' .

Soient A , B et C trois points distincts de Δ .

Soient A' , B' et C' trois points distincts de Δ' .

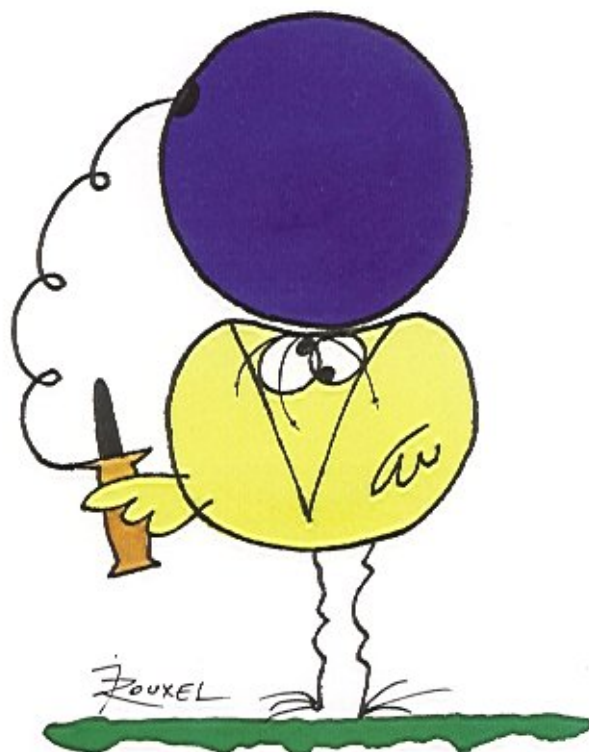
On se place dans le repère $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'})$.

Soient $P = (AB') \cap (A'B)$, $Q = (AC') \cap (A'C)$ et $R = (BC') \cap (B'C)$.

On suppose d'abord que ces trois points sont bien définies.

1. Faire une figure soignée.
2. Préciser les coordonnées de A , B et A' .
3. Sous quelles formes s'écrivent les coordonnées de C , B' et C' ?
On exprimera ces coordonnées, respectivement, à l'aide des variables c , β et γ .
4. Déterminer, en fonction de c , β et γ , les coordonnées de P , Q et R .
5. Montrer que les points P , Q et R sont alignés.
6. On suppose que $(A'B)$ et (AB') sont parallèles. Le point P n'est alors plus défini. On suppose que Q et R sont bien définis et distincts.
Montrer que, dans ce cas, la droite (QR) est parallèle aux droites (AB') et $(A'B)$.

Les devises Shadok



EN ESSAYANT CONTINUUELLEMENT
ON FINIT PAR RÉUSSIR. DONC:
PLUS ÇA RATE, PLUS ON A
DE CHANCES QUE ÇA MARCHE.