Lycée Gustave Eiffel Année 2011-2012
Mathématiques PTSI DM n°4
A rendre le 3 janvier 2012

Géométrie dans l'espace - Courbe

Exercice 1. *Étude d'une famille de plans*

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté au repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on considère l'ensemble $\mathcal{P}_m$ d'équation cartésienne :

$$(-3m+1)x + (m+1)y + (1-m)z - 2m + 2 = 0 \qquad (E_m)$$

Soit $\mathcal{S}$ d'équation cartésienne :

$$x^2 + 2x + y^2 + 2y + z^2 + 6z + 8 = 0 \qquad (E')$$

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon R.
2. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{P}_m$ est un plan.
3. (a) Montrer que l'ensemble des points communs aux plans $\mathcal{P}_m$ est une droite $\mathcal{D}$ dont on donnera un système d'équations cartésiennes.
   (b) Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.
   (c) Montrer que $\mathcal{D}$ est tangente à la sphère $\mathcal{S}$ en un point A dont on précisera les coordonnées.
   (d) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{Q}$ passant par A et orthogonal à la droite $\mathcal{D}$.
   (e) Quels sont les points qui n'appartiennent à aucun des plans $\mathcal{P}_m$?
4. (a) Pour tout $m \in \mathbb{R}$, montrer que $\mathcal{P}_m \cap \mathcal{S}$ est un cercle $\mathcal{C}_m$ dont on précisera le centre Ω_m et le rayon R_m (éventuellement nul).
   (b) Montrer que les points Ω_m appartiennent à un cercle $\mathcal{C}'$ indépendant de m de plan $\mathcal{Q}$ (trouvé à la question 3d) dont on précisera le centre Ω' et le rayon R'.
   Indication : Un raisonnement géométrique sera préférable.

Exercice 2. *Étude d'une courbe et d'une suite*

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on définit :

$$f(t) = \exp\left(-\frac{1}{t}\right) \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{f(t)}{t}$$

1. Prouver que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $tf'(t) = g(t)$.
2. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.
   En déduire que le prolongement (encore noté g) est dérivable en 0.
3. (a) Faire un tableau de variations de g sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Faire un graphe de g sachant qu'une valeur approchée de e^{-1} est 0,36 à 10^{-2} près.
4. On étudie dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la courbe paramétrée Γ définie sur $]0, +\infty[$ par $M(t)$ de coordonnées $x(t) = f'(t)$ et $y(t) = g(t)$.
5. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles le point $M(t)$ appartient à la première bissectrice d'équation $y = x$.
6. Etudier la limite de la pente de la droite $(OM(t))$ lorsque t tend vers 0^+ ou $+\infty$.
7. (a) En utilisant la question 3, faire un tableau de variations de x et y sur $]0, +\infty[$ en précisant les limites en 0^+ et en $+\infty$.
   (b) Tracer la courbe paramétrée Γ en repérant les tangentes verticales ou horizontales.
8. Soit $n \geq 3$ un entier naturel. Soit l'équation $(E_n) f(t) = \dfrac{t}{n}$ d'inconnue $t > 0$.
   (a) En utilisant la question 3, montrer que (E_n) a une unique solution dans $]0, 1[$ notée α_n.
   (b) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 3}$ est monotone.
   (c) Étudier la nature de $(\alpha_n)_{n \geq 3}$. Préciser sa limite.
   (d) Déterminer un équivalent de $(\alpha_n)_{n \geq 3}$.

Complément de cours :

Définition 1. *Suite négligeable*

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
On dit que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est prépondérante devant $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$) lorsqu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et un rang N à partir duquel $a_n = \varepsilon_n b_n$.
On note $a_n = o_{n\to+\infty}(b_n)$ ou $a_n = o(b_n)$ (s'il n'y a pas d'ambiguité) et on lit "a_n est un petit o de b_n".

Définition 2. *Suites équivalentes*

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $a_n - b_n = \mathrm{o}(b_n)$.
On note $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ ou $a_n \sim b_n$ (s'il n'y a pas d'ambiguité sur la variable).

Proposition 1. *Caractérisation à l'aide du quotient*

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
On suppose que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$.