Lycée Gustave Eiffel Année 2011-2012
Mathématiques PTSI DM n°6
A rendre le 16 avril 2012

Algèbre linéaire - Dérivation

Problème 1. *Une application de l'égalité de Taylor-Lagrange*

I- L'égalité de Mac Laurin, avec reste de Lagrange, à l'ordre 2
a désigne un nombre réel strictement positif, et f une fonction continue sur $[0, a]$ et deux fois dérivable sur $]0, a[$. On définit la fonction φ par :

$$\forall x \in [0, a] \quad \varphi(x) = f(a) - f(x) - (a - x)f'(x) - \frac{\lambda}{2}(a - x)^2$$

où λ est la constante réelle définie par $\varphi(0) = 0$.
En appliquant le théorème de Rolle à φ, démontrer que :

$$\exists c \in]0, a[\quad f(a) = f(0) + af'(0) + \frac{a^2}{2}f''(c)$$

Indication : On étudiera la valeur de λ.

II- Calcul de la somme des carrés des n premiers entiers naturels non nuls

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - k^3$.

2. En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

III- Calcul de la limite d'une somme
Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0, 1]$ et deux fois dérivable sur $]0, 1[$, telle que $f(0) = 0$ et dont la dérivée seconde est bornée sur $]0, 1[$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels par, pour tout entier naturel non nul n,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = f\left(\frac{1}{n^2}\right) + f\left(\frac{2}{n^2}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n^2}\right)$$

A l'aide des résultats des questions précédentes démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\dfrac{1}{2}f'(0)$.

IV- Application
En utilisant la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x)$, déduire de la question 3 que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général

$$p_n = \frac{1}{n^{2n}} \prod_{k=1}^{n} (n^2 + k) = \frac{(n^2+1)(n^2+2)\dots(n^2+n)}{n^{2n}}$$

est convergente et préciser sa limite.

Problème 2. *Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et de ses itérés*

On définit l'application f sur l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ par :

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ -x + y \\ 2x + 2y + 2z \end{pmatrix}$$

Dans toute la suite de l'exercice, $\vec{a}$ désigne le vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et F le sous ensemble

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y = 0 \right\}$$

1. (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et préciser une base de F.

(b) Montrer que f est un endomorphisme de E.

(c) Déterminer le noyau de f et en préciser une base.
L'endomorphisme f est-il un automorphisme de E ?

(d) Donner une base de $\mathbb{R}^3$ puis de $\operatorname{Im}(f)$.
Justifier l'égalité $\operatorname{Im}(f) = F$.

2. Montrer : $f^2 = f \circ f = 2f$.
En déduire f^k en fonction de f pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

3. Soit un vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$. On pose $\vec{v} = \dfrac{1}{2} f(\vec{u})$ et $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$.

   (a) Calculer $f(\vec{w})$. Que peut-on en déduire ?

   (b) Montrer que $\operatorname{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont des sous-espaces supplémentaires dans E.

4. On pose $g = f + \mathrm{I}$ où $\mathrm{I} = \mathrm{Id}_E$ (application identité de $E = \mathbb{R}^3$).

   (a) Montrer qu'il existe deux suites $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\beta = (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad g_n = \alpha_n f + \beta_n \mathrm{I}$$

   et exprimer α_{n+1}, β_{n+1} en fonction de α_n et β_n.

   (b) Déterminer α_n puis β_n en fonction de n.

   (c) En déduire une expression de $g^n \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. **Une application :** on définit trois suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et} \;:\; \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 2v_n \\ w_{n+1} = 2u_n + 2v_n + 3w_n \end{cases}$$

   (a) Quelle relation existe-t'il entre $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$ et g ?

   (b) En déduire les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n.