Algèbre linéaire - intégration

Problème 1. *Intégrales de Wallis*

Partie A. Résultats préliminaires

1. **(a)** Justifier que pour tout réel $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$.

(b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ et tout $u \in [0, n]$, $\mathrm{e}^{-u} - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \geq 0$.

2. **(a)** Justifier que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \geq x + 1$.

(b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ et tout $t \in [0, 1]$, $(1-t)^n \mathrm{e}^{nt} \geq (1-t^2)^n$.

(c) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout $t \in [0, 1]$, $(1-t^2)^n \geq 1 - nt^2$.

(d) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ et tout $u \in [0, n]$, $\mathrm{e}^{-u} - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \leq \frac{u^2}{n}\mathrm{e}^{-u}$.

Partie B. Intégrales de Wallis

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\ \mathrm{d}t$.

1. **(a)** Calculer I_0 et I_1 et justifier que $I_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

(c) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.

2. **(a)** Montrer que la suite $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que pour tout $n \geq 1$, $\frac{n}{n+1} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1$.

(b) Justifier alors que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

3. Soit n un entier naturel.

(a) Trouver une relation entre $J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n\ \mathrm{d}t$ et $\int_0^1 (1-u^2)^n\ \mathrm{d}u$.

(b) Montrer que pour tout entier $p \geq 0$, $\int_0^1 (1-u^2)^p\ \mathrm{d}u = I_{2p+1}$.

(c) En déduire la limite en $+\infty$ de la suite (J_n).

Problème 2. *Résolution d'équations fonctionnelles différentielles*
(adapté de E3A - Épreuve de mathématiques A PSI (2010))

Dans tout le problème, E désigne l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ définies sur $\mathbb{R}$; *i.e.* $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Partie I : Résolution d'une équation fonctionnelle différentielle

Soit $f \in E$.

1. Montrer que si f est paire, alors f' est impaire.

2. Établir un résultat analogue pour les fonctions impaires.

3. Les réciproques de ces deux derniers résultats sont-elles vraies ?

4. Soit H l'application de E dans E qui, à $u \in E$, associe la fonction v définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad v(x) = u(-x)$$

(a) Montrer que H est un endomorphisme de E.

(b) Montrer que H est une symétrie linéaire de E.

(c) Grâce à l'application linéaire H, retrouver que toute fonction de E se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

5. On considère l'équation fonctionnelle différentielle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) + f(-x) = 1 + \sin(2x) \quad (\mathcal{E})$$

On note h et g les parties respectivement paire et impaire de f.

(a) Montrer que f est solution de $(\mathcal{E})$ si, et seulement si, h et g sont solutions de deux équations différentielles du second ordre que l'on précisera.

(b) Résoudre ces équations différentielles.

(c) En déduire les solutions de l'équation $(\mathcal{E})$.

Partie II : Étude d'un endomorphisme

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit φ l'application qui, à $y \in E$, associe : $\varphi(y) = y'' + \lambda y$.

Indication : Tout au long de cette partie, il sera très souvent nécessaire de discuter en fonction du signe de λ.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.

2. Montrer que le noyau de φ est de dimension finie.

3. Déterminer une base de $\ker(\varphi)$ constituée uniquement de fonctions paires ou impaires.

4. Quelle est la structure de l'ensemble des antécédents par φ de la fonction constante égale à $\dfrac{1}{2}$? Décrire précisément cet ensemble.

5. **(a)** Soit $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions de E qui sont bornées.
Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de E.

(b) Déterminer l'intersection de $\ker(\varphi)$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(c) Pour quelles valeurs de λ a-t-on $\ker(\varphi) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{0\}$.

(d) Si $\lambda < 0$, peut-on trouver $f \in \ker(\varphi)$ et $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R} \quad x = f(x) + g(x)$?

(e) Les sous-espaces vectoriels $\ker(\varphi)$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont-ils supplémentaires ?